FUNDAMENTOS DE LOS SISTEMAS ELECTRONICOS

621

Por JOSE MANUEL PERALA SANTOLARIA

EL objeto del presente trabajo es vulgarizar, en forma absolutamente elemental, los fundamentos más simples que han hecho posible el cálculo electrónico. Para ello, nos limitaremos a resaltar ciertos paralelismos observables entre el sistema de numeración binaria, el Algebra de Boole, la lógica y los circuitos eléctricos. Tal observación —simplicisima, como veremos—, unida a las posibilidades del Algebra de Boole, y al extraordinario desarrollo actual de la técnica electrónica, ha hecho posible la utilización de los ordenadores electrónicos, cuyo campo de aplicación parece inagotable, así como las posibilidades de su perfeccionamiento. Tal es la virtud de las ideas más simples, que suelen ser las más fecundas.

1. Sistema de numeración binaria

Nuestro sistema usual de númeración es el decimal, de base 10. El número de grafismos que tal sistema utiliza es de $10 - 1 = 9$ $(1, 2, 3, \ldots, 9)$, aparte del 0 (valor nulo).

Cualquier número N se representa con estos grafismos:

$$N = mp \ldots cba$$

y su valor se obtiene así:

$$\frac{10^{n-1}}{m} \quad \frac{10^{n-2}}{p} \quad \ldots \quad \frac{10^2}{c} \quad \frac{10^1}{b} \quad \frac{10^0}{a} \qquad (n = \text{núm. de cifras})$$

$$N = m\,10^{n-1} + p\,10^{n-2} + \ldots + c\,10^2 + b\,10 + a$$

Los grafismos utilizados (que pueden ser cualquiera de los que dispone el sistema, del 0 al 9), se denominan por su situación: $a =$ unidades; $b =$ decenas; $c =$ centenas; etc.

El sistema binario es idéntico. Basta con cambiar el 10 por el 2 (base). El número de grafismos será: $2 - 1 = 1$, aparte del 0. Un número cualquiera $N = mp \ldots cba$ sólo contendrá, por tanto, unos y ceros. Según su situación, se llamarán: $a =$ unidades; $b =$ bienas; $c =$ trienas; etc.

De igual manera, su valor será:

$$\frac{2^{n-1}}{m} \quad \frac{2^{n-2}}{p} \quad \ldots \quad \frac{2^2}{c} \quad \frac{2^1}{b} \quad \frac{2^0}{a} \quad ; \quad N = m\,2^{n-1} + \ldots + c\,2^2 + b\,2 + a$$

Al revés, para pasar del sistema decimal al binario, basta con dividir repetidamente por la base (2). Los restos constituyen el número binario. Por ejemplo, supongamos el número decimal $N = 237$ Para pasar a binario:

$$\begin{array}{llllllll}
237 & \underline{|\,2} & & & & & & \\
3 & 118 & \underline{|\,2} & & & & & \\
17 & 18 & 59 & \underline{|\,2} & & & & \\
1 & 0 & 19 & 29 & \underline{|\,2} & & & \\
 & & 1 & 9 & 14 & \underline{|\,2} & & \\
 & & & 1 & 0 & 7 & \underline{|\,2} & \\
 & & & & & 1 & 3 & \underline{|\,2} \\
 & & & & & & 1 & 1
\end{array} \qquad N = 11101101$$

Comprobemos el valor decimal de $N = 11101101$. Para ello:

$$\frac{2^7}{1} \; \frac{2^6}{1} \; \frac{2^5}{1} \; \frac{2^4}{0} \; \frac{2^3}{1} \; \frac{2^2}{1} \; \frac{2^1}{0} \; \frac{2^0}{1} \quad ; \quad N = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 237$$

Obsérvese que un número escrito en binario requiere muchas cifras. Ello constituye un inconveniente. Sin embargo, el hecho de que su representación no contenga más «signos» que el uno y el cero (o bien: sí o no, presencia o ausencia, bombilla encendida o apagada, relé activado o no, etc.), supone la posibilidad de representar un número por, por ejemplo, un cierto número de bombillas, de las cuales unas están encendidas (unos), y otras apagadas (ceros).

Interesa, naturalmente, economizar bombillas. Con n bombillas pueden escribirse, en binario, $2^n - 1$ números (excluido el 0). Para escribir el 237 hemos necesitado ocho bombillas (cifras), porque $2^8 = 256$ (8 es la menor potencia de 2 que sobrepasa a 237).

Con tres bombillas pueden escribirse $2^3 - 1 = 7$ números (ex: 0), que son:

2^2	2^1	2^0			
0	0	0	;	0	(excluido, como luego veremos)
0	0	1	;	1	
0	1	0	;	2	
0	1	1	;	3	
1	0	0	;	4	
1	0	1	;	5	
1	1	0	;	6	
1	1	1	;	7	

lo que indica que para representar cualquier grafismo del sistema de numeración de base 8, serían suficientes tres bombillas. En cambio, en nuestro sistema decimal, se necesitan cuatro, ya que las cifras 8 y 9 no pueden representarse con tres. Y puesto que

$$2^4 - 1 = 15$$

quiere decirse que sobran bombillas (o *bits,* como luego veremos). Nuestro sistema decimal fue adoptado exclusivamente porque son 10 los dedos de las manos, pero es evidente, tras lo dicho, que cualquier sistema de base = potencia de 2, sería más beneficioso. Naturalmente, esta potencia no podría ser muy pequeña (1, 2) porque el número de cifras sería elevado (hemos visto que 237 tendría ocho cifras) ni muy alto (4, 5, ...) porque ello obligaría a inventar y usar muchos grafismos superiores al 9. Por ejemplo, en el caso del 4 —base 16— sería necesario inventar grafismos representativos de las «cifras» 10, 11, 12, 13, 14 y 15, ya que la 16 coincidiría con el 10 —uno, cero—, como hemos visto antes:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 16 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

Por ello, aparte de otras razones de orden práctico, sería preferible adoptar el sistema de base 8 (octal), que es la potencia 3 de 2, en el que bastarían tres bombillas para representar sus cifras significativas. Sin embargo, de momento no hay más remedio que adaptar nuestro sistema decimal al binario, con cuatro bombillas por cifra significativa.

De acuerdo con esto, aclaremos que las máquinas no registran, o actúan, con números escritos directamente en binario, sino en decimal codificado en binario (DCB). Es decir, cada cifra se representa en binario (mediante cuatro *bits* o «bombillas» por cifra), y no la totalidad. Por ejemplo, el número 237, en lugar de representarse como hemos dicho (11101101), se escribe así:

2	3	7
0010	0011	0111

de acuerdo con el «código»:

8	4	2	1		
0	0	0	0	=	(reservada a otro fin)
0	0	0	1	=	1
0	0	1	0	=	2
0	0	1	1	=	3
0	1	0	0	=	4
0	1	0	1	=	5
0	1	1	0	=	6
0	1	1	1	=	7
1	0	0	0	=	8
1	0	0	1	=	9
1	0	1	0	=	0

En el sistema binario las operaciones elementales pueden tabularse igual que en el decimal, sólo que las «tablas» son más sencillas:

Suma:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$0+0=1$
$0+1=1$
$1+0=1$
$1+1=10$

ya que, como sabemos,

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

DA-1968, núm. 125. JOSE MANUEL PERALA SANTOLARIA. Fundamentos de los sistemas electrónicos

Multiplicación:

$\times$	0	1
0	0	0
0	0	1

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 1$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$

Tales «tablas» constituyen «programas» de trabajo para la máquina, a quien puede ordenarse con ellos, tal o cual operación (más tarde veremos en qué forma).

En realidad, y puesto que todas las operaciones pueden referirse a la suma (multiplicación = sumas sucesivas; resta = suma con el complemento; división = restas sucesivas; potenciación = multiplicaciones sucesivas; etc.), la máquina electrónica se limita a sumar (eso sí, con rapidez).

2. Algebra de Boole

Antes de definirla, precisaremos algunos conceptos elementales:

2.1 *Conjunto.*—Grupo de entes, en sentido general. Entes = elementos. Adoptamos la notación: E $(a\ b\ c\ \ldots)$. E = conjunto; $a, b, c, \ldots =$ = elementos.

2.2 *Subconjunto.*—Conjunto formado por elementos pertenecientes a E. Por ejemplo: S $(a\ b)$.

2.3 *Subconjuntos complementarios* (A y A′).— Cuando todos los elementos que constituyen E pertenecen a A o a A′.

2.4 *Subconjunto vacío* ($\emptyset$).—Es el complementario de E.

2.5 *Conjunto de las partes de un conjunto.*—Es el formado por todos los subconjuntos posibles de E. Por ejemplo: Si

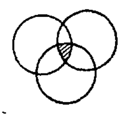
$$\mathrm{E}\ (a\ b\ c) \quad ; \quad \mathrm{P}\ (\mathrm{E}) = (\emptyset, a, b, c, ab, ac, bc, abc)$$

el número de elementos de P (E) es siempre 2^n (En el ejemplo, 8.)

2.6 *Intersección de varios subconjuntos* S_i.— Es el formado por los elementos comunes.

Ejemplo:

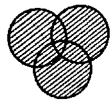
$$\mathrm{I} = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

I 

2.7 *Reunión de varios* S_i.— Es el formado por todos los elementos, comunes y no comunes.

Ejemplo:

$$R = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$



2.8 *Conjunto producto de un conjunto por sí mismo* (E×E).—El formado por todas las parejas posibles de sus elementos.

Ejemplo:

E×E	*a*	*b*	*c*
a	*aa*	*ab*	*ac*
b	*ba*	*bb*	*bc*
c	*ca*	*cb*	*cc*

2.9 *Aplicación del conjunto* E *en* E'.— Es establecer una correspondencia de tal manera que a cada elemento de E corresponda un elemento de E'.

2.10 *Ley de composición interna.*—Es definir una aplicación de E×E en E.

Ejemplo: Definida una operación cualquiera: $a \ \& c = b$ (etc.),

&	*a*	*b*	*c*
a			*b*
b	(etc.)		
c			

a cada elemento de E×E se le hace corresponder con uno de E.

Las leyes de composición interna tienen una serie de propiedades (asociativa, conmutativa, distributiva) que no detallaremos.

2.11 *Estructura.*—Dotar a un conjunto de una estructura es definir en él unas leyes de C. I.

2.12 *Algebra.*—Estructura que posee, al menos, dos leyes de C. I.

Ejemplo: Definidas las dos leyes, & y £, así:

&	*a*	*b*	*c*
a	*c*	*a*	*b*
b	*a*	*c*	*b*
c	*c*	*b*	*a*

£	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*a*	*b*
b	*a*	*b*	*c*
c	*c*	*a*	*a*

Planteada cualquier «ecuación» de esta Algebra. Por ejemplo: $([a\&c]\pounds b)\&a =$ (para resolverla, no hay más que ir a las tablas definidas, teniendo en cuenta los paréntesis. Según ello: $a\&c = b$; $b \pounds b = \mathrm{B}$; $b\&a = a) = a$.

(Para «tener en cuenta los paréntesis» hay que conocer —basta para nuestro objeto un conocimiento intuitivo— las propiedades a que aludíamos en 2.10.)

Supongamos ahora un conjunto $\mathrm{E}(a\,b\,c)$:

$$\mathrm{P(E)} \text{ será} = (\emptyset, a, b, c, ab, ac, bc, abc) \quad (2^3 e)$$

y supongamos que las dos leyes que definimos como & y £ sean las ya conocidas:

Intersección $= \cap$
Reunión $= \cup$

y que, además, imponemos una correlación (complementación): A complementario de A′.

Siguiendo el mismo camino, tabulemos estas operaciones: Como ya sabemos:

$\cap$	$\emptyset$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a		a	$\emptyset$	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$	a
b			b	$\emptyset$	b	$\emptyset$	b	b
c				c	$\emptyset$	c	c	c
ab					ab	a	b	ab
ac	(simétrico)					ac	c	ac
bc							bc	bc
abc								abc

$\cup$	$\emptyset$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$\emptyset$	$\emptyset$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
a		a	ab	ac	ab	ac	abc	abc
b			b	bc	ab	abc	bc	abc
c				c	abc	ac	bc	abc
ab					ab	abc	abc	abc
ac	(simétricos)					ac	abc	abc
bc							bc	abc
abc								abc

$\emptyset$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
abc	bc	ac	ab	c	b	a	$\emptyset$

Con ayuda de estas tablas podemos resolver cualquier ecuación del Algebra que hemos definido. Por ejemplo:

Ecuación:

$$(A \cap B') \cup (B \cup A')$$

siendo

$$A = bc \quad ; \quad B = a$$

basta ir a las tablas para obtener la solución: *abc*.

El Algebra que hemos definido mediante las tablas anteriores posee una serie de propiedades: Idempotencia, asociatividad, conmutatividad, distributividad, absorción, complementaridad, dualidad e involución, con las cuales es posible simplificar las ecuaciones y operar correctamente con los paréntesis, en lugar de acudir directamente a las tablas, como hemos hecho en el ejemplo anterior. Más adelante se comprenderá el interés de simplificar las ecuaciones. De momento no entraremos en el detalle de tales propiedades enumeradas y sólo diremos que su demostración gráfica es evidente (círculos de Euler).

2.13 *Algebra de Boole*.—Es la más sencilla posible. Se refiere al conjunto más simple, el formado por un solo elemento: E (a). Por tanto: P (E) $= (\emptyset, a)$. En él se definen dos leyes de C. I. (intersección y reunión) y una complementación:

$\cap$	$\emptyset$	a
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	$\emptyset$	a

$\cup$	$\emptyset$	a
$\emptyset$	$\emptyset$	a
a	a	a

	$'$
$\emptyset$	a
a	$\emptyset$

Se conviene en que

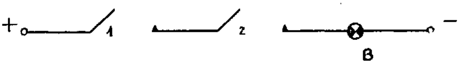
$$\emptyset = 0 \quad \text{y} \quad a = 1$$

De modo que, así como en el apartado 1 nos encontrábamos con una Aritmética cuyos números, al no tener más cifras que el 1 y el 0, representables por bombillas o impulsos eléctricos, podían registrarse eléctricamente, ahora nos encontramos con un Algebra que «liga» entes representables por 1 ó 0. Tal «ligazón», o ecuación de Boole, puede siempre traducirse, como veremos, por un circuito eléctrico. De momento, baste con fijar la idea de que disponemos de un Algebra, o herramienta para combinar de todos los modos posibles entes SI o NO, registrables eléctricamente.

3. Circuitos eléctricos elementales

Examinemos los tres siguientes:

3.1 En serie:



(Dos contactores —1 y 2— y una bombilla, o receptor, B).

Observemos lo que ocurre al accionar los contactores:

(1)	(2)	(B)
abierto	abierto	apagada
»	cerrado	»
cerrado	abierto	»
»	cerrado	encendida

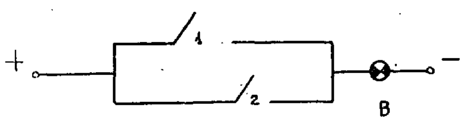
Si convenimos en designar:

$$\begin{array}{llll} \text{contactor abierto} & = \text{luz apagada} & = 0 \\ \quad » \qquad \text{cerrado} & = \quad » \quad \text{encendida} & = 1 \end{array}$$

la «tabla» anterior coincide con la de la $\cap$ (intersección) del Algebra de Boole:

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

3.2 En paralelo:



Siguiendo el mismo camino, obtenemos la «tabla»

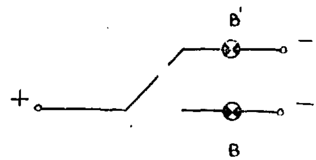
(1)	(2)	(B)
abierto	abierto	apagada
»	cerrado	encendida
cerrado	abierto	»
»	cerrado	»

DA-1968, núm. 125. JOSE MANUEL PERALA SANTOLARIA. Fundamentos de los sistemas electrónicos

que coincide con la U (reunión) del Algebra de Boole:

U	0	1
0	0	1
1	1	1

3.3 Relevador:



contactor en	B	B′
1	encendida	apagada
1′	apagada	encendida

que coincide con la ′ (complementación) del Algebra de Boole:

	1	0
′	0	1

coincidencias que retenemos, de momento, para aplicarlas más adelante.

4. «Frases» lógicas

Observemos las tres siguientes:

4.1 Si voy al cine, **Y** abro los ojos, veo la película. (Frase en «Y».)

Convengamos en que

1 = Ir al cine = Abrir los ojos = Ver la película
0 = No » = No » = No »

Entonces, la «tabla lógica» será:

Ir al cine

Abrir los ojos	∩	0	1
	0	0	0
	1	0	1

que coincide con la ∩ (intersección) de Boole.

DA-1968, núm. 125. JOSE MANUEL PERALA SANTOLARIA. Fundamentos de los sistemas electrónicos

Luego, según vemos, una frase en «Y» puede traducirse a una intersección de Boole, y, por tanto, materializarse en un circuito en SERIE, que, además, resuelve una multiplicación en binario.

4.2 Si salgo lloviendo, **O** me lanzo al río, me mojo. (Frase en «O».)

Convenimos:

1 = Salir lloviendo = Lanzarse al río = Mojarse
0 = No » = No » = No »

La «tabla lógica» será:

Lanzarse al río \ *Salir lloviendo*	0	1
0	0	1
1	1	1

que coincide con la U (reunión) de Boole.

Luego, una frase «en O» puede traducirse a una reunión de Boole, y, por tanto, materializarse en un circuito en paralelo.

NOTA.—El «O» a que nos hemos referido se llama «O inclusivo» (O*i*), ya que las dos cosas posibles no se excluyen, como sucede con el «O exclusivo» (O*e*), que veremos en 4.4.

4.3 Si como, **NO** paso hambre. (Frase en NO.)

Tabla lógica:

Comer	0	1
Pasar hambre	1	0

que coincide con la complementación (′) de Boole.

Luego, una frase en «NO» puede traducirse en una complementación Boole y en un circuito relevador.

4.4 Si salgo lloviendo, **O** me ducho, me mojo. (Frase en «O exclusivo» (O*e*), porque ambas posibilidades se excluyen.)

Tabla lógica:

Salir lloviendo \ *Ducharse*	0	1
0	0	1
1	1	0

Veamos con qué ecuación de Boole coincide esta tabla:

La frase puede escribirse así: Si salgo (X) y (∩) no (′) llueve (Y), o (U) no (′) salgo (X) y (∩) llueve (Y), no (′) me mojo (1).

Que es un caso de la ecuación de Boole:

$$(X \cap Y') \cup (X' \cap Y) = \text{«suma directa»} = X \oplus Y$$

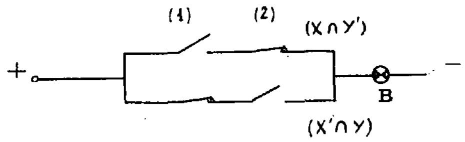
cuya tabla es evidentemente la siguiente:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

que coincide con la del *Oe*.

Para ver su traducción a un circuito eléctrico (no ya simple, sino compuesto) basta con combinar los circuitos simples que conocemos, según indique la ecuación de Boole hallada.

Vemos que se trata de la reunión (paralelo) de dos intersecciones (serie) con el relevador cambiado. Es decir:



Compruébese que:

(Contact.) 1	2	B	
0	0	0	
0	1	1	(como en $\oplus$)
1	0	1	
1	1	0	

Veamos ahora a qué operación en binario corresponde este circuito (o *Oe*, o $\oplus$).

La tabla de sumar en binario

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	10

coincide con la anterior en las unidades (las bienas: 4, 2).

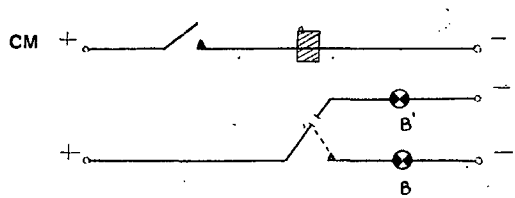
5. Resumen

Con el paralelismo establecido entre: planteamientos lógicos, ecuaciones de Boole, operaciones aritméticas en binario y circuitos eléctricos (llamados «lógicos»), puede fácilmente intuirse que disponemos de un «alfabeto» con el que podemos «construir» con ilimitadas posibilidades, y a la velocidad con que trabaja un ordenador electrónico. El cual podrá, según lo dicho, realizar cualquier proceso que obedezca a leyes lógicas o aritméticas, sumar, discernir entre el sí y el no, y ordenar.

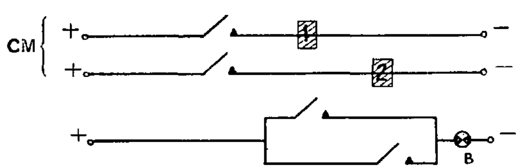
6. Observaciones

6.1 Los circuitos «lógicos» anteriores deben ser, naturalmente, complementados por «circuitos de mando» que accionen eléctricamente los contactores

Relevador:

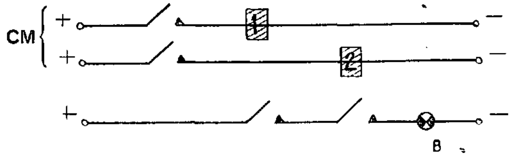


En serie (Y):

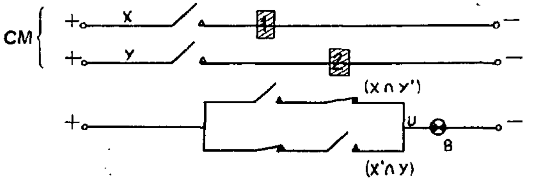


DA-1968, núm. 125. JOSE MANUEL PERALA SANTOLARIA. Fundamentos de los sistemas electrónicos

En paralelo (Oi):



En (Oe) ($\oplus$):



6.2 Utilizando las propiedades del Algebra de Boole, apuntadas en 2.12, conviene simplificar la ecuación al máximo (optimizar), ya que, al ser transformada en un circuito lógico, conviene que su esquema sea el más corto, por razones de economía.

Por ejemplo: Supongamos que cierto planteamiento lógico ha dado origen a la ecuación

$$Z = (X \cup Y') \cap X'$$

Tal operación puede tabularse: (X)

(Y)	Z	0	1
	0	1	0
	1	0	0

y traducirse a un circuito compuesto (paralelo y serie, con los oportunos —′—). Sin embargo, conviene «optimizar» el circuito, simplificando la ecuación.

Por la propiedad distributiva:

$$Z = (X \cup Y') \cap X' = (X \cap X') \cup (Y' \cap X')$$

Pero

$$(X \cap X') = O \quad \text{y} \quad O \cup (Y' \cap X') = (Y' \cap X')$$

Y, por la conmutativa:

$$(Y' \cap X') = (X' \cap Y') = Z$$

Este es el esquema más sencillo. Todavía podríamos aplicar la propiedad dualidad:

$$X' \cap Y' = (X \cup Y)'$$

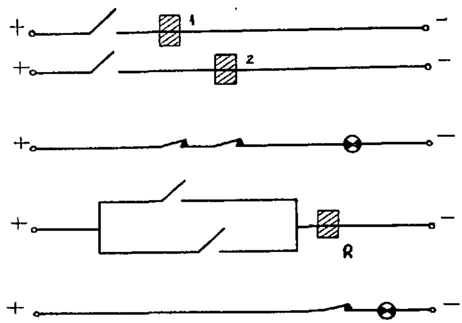
Podemos elegir, pues, entre un circuito en serie y otro en paralelo, con las oportunas complementaciones. Representaremos ambos circuitos lógicos en un mismo esquema:

Circuitos de mando

$X' \cap Y'$

$(X \cup Y)$

$(X \cup Y)'$



(R = Relé de complementación).

Evidentemente, se debe elegir en este caso el circuito en serie ($X' \cap Y'$), más económico.