SISTEMAS NORMATIVOS, SISTEMAS DE BERTALANFFY Y REDES NUMERICAS BINARIAS

Por el Prof. Dr. MIGUEL SANCHEZ-MAZAS

Departamento de Lógica de la Universidad del País Vasco y CALIJ. San Sebastián (España)

RESUMEN

En este nuevo modelo aritmético de los sistemas normativos, todo conjunto de normas que determina el estatuto deóntico de una acción queda representado por una red de números naturales para el cálculo de sus consecuencias. Los números asociados a los casos y a los estatutos fuertes (soluciones) o débiles permiten traducir toda relación verdadera en el sistema por una relación aritmética verdadera. Así el modelo propuesto en trabajos anteriores se extiende a un marco lógico más amplio, con la traducción aritmética de la distinción de Alchourrón y Bulygin entre modalidades fuertes y débiles y sus condiciones para la completitud y coherencia de un sistema normativo, que se presenta como un sistema de Bertalanffy cuyos *input* y *output* son, respectivamente, los números asociados a los casos y a sus soluciones.

Consideremos un sistema normativo (1) reducido a un conjunto α de normas que determinan el estatuto deóntico (2) de una determinada acción o conducta y en determinados casos $x_1, x_2, ..., x_i, ...$

Cada norma debe entenderse como un enunciado (3) que correlaciona casos con soluciones.

Cada solución define el estatuto deóntico que una acción o conducta y adquiere en un sistema normativo α en uno de los casos para los que la acción y está deónticamente determinada en el sistema.

El número y la naturaleza de los casos para los que el sistema normativo α ofrece soluciones está estrictamente determinado por el número y la naturaleza de las propiedades relevantes (4) en el sistema para la determinación deóntica de la acción o conducta que constituye el contenido normativo (5) de la solución (6), así como por las relaciones lógicas entre propiedades, que vienen a restringir la independencia lógica (7) recíproca de éstas.

(1) Asumimos aquí, en sus líneas generales, la concepción expuesta por Alchourrón y Bulygin en su obra capital *Normative Systems* y en especial su noción de sistema normativo: «El sistema normativo es definido como un conjunto de enunciados que tiene (algunas) consecuencias normativas (para algún Universo de Casos y algún Universo de Soluciones», 2, p. 23. «Todo conjunto de normas constituye un sistema normativo... La inversa no vale: un sistema normativo puede contener otros enunciados además de normas», 2, p. 38. Aquí sólo consideraremos conjuntos de enunciados exclusivamente normativos.

(2) Utilizamos aquí la expresión «estatuto deóntico de una acción» en el mismo sentido en que Alchourrón y Bulygin emplean «*status* deóntico o normativo de una acción». «Un problema normativo puede ser considerado como una pregunta acerca del *status* deóntico de ciertas acciones o conductas, es decir, su permisión, prohibición u obligatoriedad», 2, p. 32. «Nos preocupa, pues, lo que podemos llamar el *status* normativo o deóntico de una acción» *(ibid.)*.

(3) «Llamaremos normas a los enunciados (es decir, a las expresiones lingüísticas) que correlacionan casos con soluciones», 2, p. 37.

(4) Sobre la noción de propiedad relevante en la concepción de Alchourrón y Bulygin, véase 2, páginas 152-157, donde el problema es debatido a fondo por los autores. Aquí sólo retendremos las definiciones siguientes: 1. Una propiedad p es relevante en un determinado caso en relación a un sistema normativo α y a un Universo de Acciones determinado si y sólo si el caso considerado y su complementario con respecto a p tienen diferente estatuto normativo en relación a α y al Universo de Acciones: 2. «Dos casos son complementarios con respecto a una propiedad p si y sólo si los dos casos difieren entre sí en que p está presente en uno de ellos y ausente en el otro, siendo iguales todas las demás propiedades definitorias del caso», 2, p. 152.

(5) Toda acción de un Universo de Acciones y todo compuesto veritativo-funcional de tales acciones (siempre que no sea tautológico ni contradictorio) será llamado contenido normativo o deóntico», 2, p. 36.

(6) «Las expresiones... —en las cuales un contenido normativo vaya precedido por un carácter normativo (siempre que no sean tautológicas ni contradictorias)— y los compuestos veritativo-funcionales de las mismas (siempre que éstos no sean tautológicos ni contradictorios) se llamarán *soluciones*. Se dirá que un contenido normativo precedido por un carácter deóntico está (deónticamente) determinado. De ahí que toda solución determine deónticamente algún contenido. Cuando la solución es tal que determina todos los contenidos que corresponden a un Universo de Acciones, diremos que es una *solución maximal*», *ibidem*.

(7) No seguiremos aquí a Alchourrón y Bulygin en su exigencia metodológica de que todas las propiedades consideradas para la definición de un caso sean lógicamente independientes entre sí. La hipótesis de que así ocurre en la realidad —o hipótesis del atomismo lógico—, ampliamente discutida

En efecto, cada caso está definido por uno de los posibles compuestos veritativo-funcionales (no tautológico ni contradictorio) de las m propiedades de un Universo de Propiedades UP (8):

$$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m$$

Llamarenos —de acuerdo con Alchourrón y Bulygin— caso elemental (9) a todo caso definido por una conjunción que contiene una *y* una sola de cada una de las propiedades de un Universo de Propiedades o su negación (pero no ambas a la vez).

De esta definición resulta que el número n de casos elementales diferentes o no equivalentes entre sí —o, más precisamente, el número de clases de equivalencia de casos elementales— será igual a 2^m:

n (número de casos elementales) $= 2^m$ (m, número de propiedades)

en la hipótesis del atomismo lógico o de la independencia lógica recíproca de las propiedades del Universo de Propiedades considerado —independencia que aquí no aceptamos en el caso general— y menoi que 2^m si introducimos en el sistema fórmulas lógicas que establecen relaciones entre las propiedades, que restringen su independencia.

A su vez, el número total de casos (elementales o complejos) diferentes o no equivalentes entre sí —o, más precisamente, el número de clases de equivalencia de casos— será igual a $2^n - 2$:

r (número total de casos) $= 2^n - 2 = 2^{(2m)} - 2$

cuando las propiedades del Universo de Propiedades considerado sean independientes entre sí y menor en caso contrario.

Pasando ahora a considerar los distintos estatutos deónticos que una cierta acción *y* puede adquirir en un sistema normativo α en determinados casos (a los que ahora no nos referiremos), distinguiremos —siguiendo también a Alchourrón y Bulygin— entre estatutos deónticos fuertes —correspondientes a soluciones que se deducen lógi-

por los autores en 2, pp. 52-54, nos parece poco realista y práctica en algunos casos, ya que no corresponde a las propiedades efectivamente consideradas y manejadas en los códigos. Daremos, por otra parte, en este trabajo un ejemplo de sistema normativo, extraído del Derecho civil de España, en el que no es realista considerar a las propiedades definitorias de los casos como lógicamente independientes entre sí y en el que, además, la consideración de una relativa interdependencia lógica entre aquéllas simplifica el modelo lógico y aritmético.

(8) Toda propiedad de un Universo de Propiedades y todo compuesto veritativo-funcional de tales propiedades —siempre que no sea tautológico ni contradictorio— define un *caso* (posible). Por consiguiente, la propiedad definitoria de un caso puede ser simple o compleja», 2, p. 34.

(9) «Cuando la propiedad definitoria es una conjunción que contiene todas las propiedades del Universo de Propiedades o sus negaciones (pero no ambas), diremos que el caso definido por esa propiedad es *elemental*. Los casos que no sean elementales serán *complejos*», *ibídem*.

camente del sistema para los casos dados— y estatutos deónticos débiles —correspondientes a ausencias de solución en el sistema para los mismos—.

Asumiremos así la siguiente definición de permisión fuerte de una acción y en un caso x en un sistema α:

> la acción y está permitida en sentido fuerte en el caso x en el sistema = si y sólo si de = se infiere una norma que permite y en el caso x (10)

y la siguiente definición de permisión débil de una acción y en un caso x en un sistema α:

> la acción y está permitida en sentido débil en el caso x en el sistema α si y sólo si de α no se infiera una norma que prohíba (= no permita) y en el caso x (11)

así como definiciones análogas para los otros estatutos deónticos fuertes o débiles.

Eludiendo ahora, como ya hemos anunciado, la consideración explícita de los casos que producen, en un sistema α, los distintos estatutos deónticos posibles, consideraremos los doce estatutos deónticos siguientes —seis fuertes y seis débiles—, designados por símbolos que, junto a la mención del carácter deóntico —obligación, permisión, prohibición...— y del sistema α de referencia, influyen también la precisión acerca del carácter fuerte (*stark,* indicado por la inicial «s») o débil (*weak,* indicado por la inicial «w») de dicho carácter.

1. Estatutos deónticos fuertes (soluciones lógicamente derivadas en el sistema α):

 1.1 Maximales:

 $\underset{\alpha}{O}sy$ (del sistema α se deriva la obligación de y);

 $\underset{\alpha}{P}hsy$ (del sistema α se deriva la prohibición de y);

 $\underset{\alpha}{F}sy$ (del sistema α se deriva la permisión bilateral de y —permisión de ejecutar y de omitir y—).

 1.2 Minimales:

 $\underset{\alpha}{P}sy$ (del sistema α se deriva la permisión unilateral de y —permisión de ejecutar y—);

(10) Véase 2. p. 174.
(11) *Ibidem.*

Ps_{α} —y (del sistema α se deriva la permisión unilateral de —y (no y) —permisión de omitir y—);

$Us_{\alpha}y$ (del sistema α se deriva que y no es facultativa, es decir, que y es obligatoria o prohibida).

2. Estatutos deónticos débiles (ausencia de soluciones opuestas en el sistema α):

2.1 Maximales:

$Ow_{\alpha}y$ (del sistema α *no* se deriva la permisión unilateral de —y (no y) —permisión de omitir y—);

$Phw_{\alpha}y$ (del sistema α *no* se deriva la permisión unilateral de y —permisión de ejecutar y—);

$Fw_{\alpha}y$ (del sistema α *no* se deriva que y no sea facultativa —y no es ni obligatoria ni prohibida en α—).

2.2 Minimales:

$Pw_{\alpha}y$ (del sistema α *no* se deriva la prohibición de y);

Pw_{α} —y (del sistema α *no* se deriva la obligación de y);

$Uw_{\alpha}y$ (del sistema α *no* se deriva la permisión bilateral o carácter facultativo de y —permisión de ejecutar y de omitir y—).

Entre estos doce estatutos deónticos posibles de una acción y en un sistema normativo α existen múltiples relaciones de oposición, de implicación o subalternación y de equivalencia lógica.

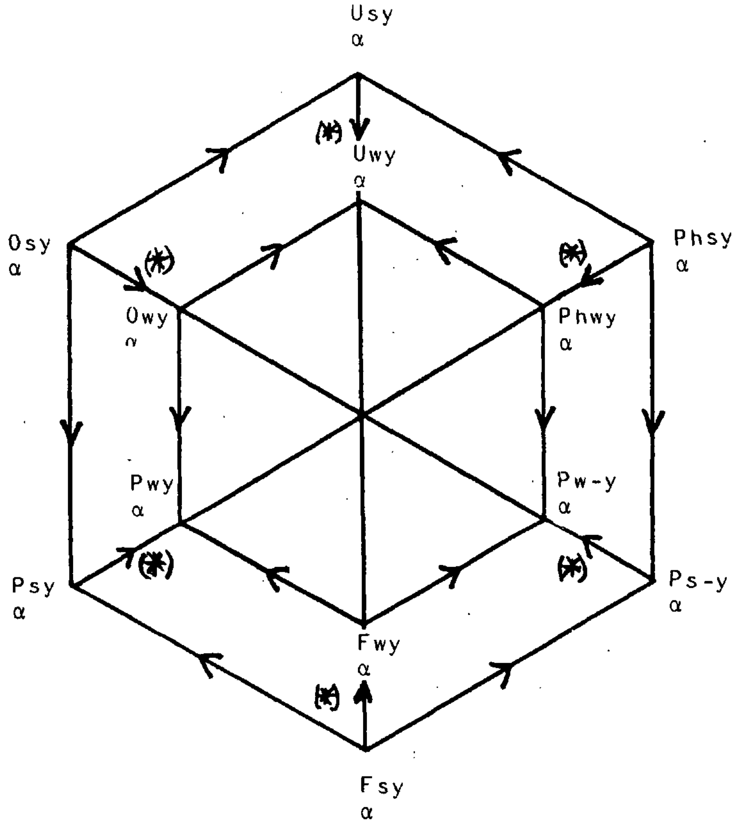
Las relaciones de oposición entre dos estatutos pueden ser de dos tipos, a saber:

1. Las derivadas de la negación externa, que, aplicada a un estatuto fuerte, da como resultado un estatuto débil y recíprocamente.
2. Las derivadas de la negación interna, que, aplicada a un estatuto fuerte, da como resultado un estatuto fuerte y, aplicada a un estatuto débil, da como resultado un estatuto débil.

Entre las relaciones de implicación o subalternación, algunas son válidas para todos los sistemas, mientras que otras sólo lo son para los sistemas coherentes —asteriscos (*) del gráfico I—.

GRAFICO I

REPRESENTACION GRAFICA BIHEXAGONAL DE LAS RELACIONES LOGICAS ENTRE LOS DOCE ESTATUTOS DEONTICOS POSIBLES DE UNA ACCION «Y» EN UN SISTEMA NORMATIVO α



Seis estatutos fuertes o soluciones
—tres maximales ($O_{\alpha}sy$, $Ph_{\alpha}sy$, $F_{\alpha}sy$) y tres minimales ($P_{\alpha}sy$, $P_{\alpha}s-y$, $U_{\alpha}sy$)—
y seis débiles o no soluciones
($O_{\alpha}wy$, $Ph_{\alpha}wy$, $F_{\alpha}wy$, $P_{\alpha}wy$, $P_{\alpha}w-y$, $U_{\alpha}wy$)

Sobre este marco lógico es posible construir un modelo aritmético de todos los sistemas normativos formados por conjuntos de normas que determinan el estatuto deóntico de una única acción o conducta para los distintos casos posibles definidos en el sistema, con el fin de permitir el cálculo aritmético, manual o informático de todas las relaciones y consecuencias lógicas que se derivan del sistema considerado.

En este modelo quedará asociado un número entero positivo a cada uno de los casos y a cada uno de los estatutos deónticos posibles de la acción considerada y una operación aritmética a cada una de las operaciones lógicas sobre casos o sobre estatutos, de tal modo que a toda relación lógica o deóntica entre casos y/o estatutos que sea verdadera en el sistema normativo corresponda siempre una relación aritmética verdadera entre los números asociados a aquéllos y recíprocamente.

El sistema considerado quedará así enteramente representado por la red de los números asociados a los casos y a los estatutos deónticos de la acción, por cuanto el número característico de cualquier caso o estatuto encierra en sí todas las relaciones lógicas y deónticas de este último con todos los demás casos y estatutos del sistema, constituyendo por ello en sí mismo, más que un nombre convencional y arbitrario para codificar, identificar y memorizar el caso o estatuto en cuestión, la auténtica tarjeta de identidad lógica y deóntica de éste en el marco del sistema o, si se quiere, un instrumento de codificación que es, a la vez, un instrumento de cálculo de las consecuencias de ese sistema.

Sean ahora:

x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_r, los r casos de un sistema α (como ya hemos indicado, $r = 2^n - 2$, donde n es el número de casos elementales diferentes o no equivalentes y, si las m propiedades del UP son independientes, $n = 2^m$);

D_1y, D_2y, ..., D_iy, ..., $D_{12}y$ los 12 estatutos posibles de la acción o conducta y; de ellos:

S_1y, S_2y, ..., S_iy, ..., S_6y los seis estatutos fuertes y W_1y, W_2y, ..., W_iy, ..., W_6y los seis estatutos débiles.

Sean, por otra parte:

N (x_i) el número asociado a un caso x_i;

N (D_iy) el número asociado a un estatuto deóntico D_iy de y;

N (S_iy) el número asociado a un estatuto fuerte (solución);

N (W_iy) el número asociado a un estatuto débil (no solución);
R (α) y R (x) las redes numéricas asociadas, respectivamente, al conjunto de componentes (casos y estatutos) y al conjunto de casos del sistema α;
$g=2^{n+1}-1$ y $f=2^{n+1}-2$ los supremos (12) de R (α) y de R (x).

La correspondencia entre:

a) Componentes del sistema α y números de R (α), de un lado;
b) operaciones y relaciones lógica en α y operaciones y relaciones aritméticas en R (α)

en que se funda nuestro modelo aritmético deberá satisfacer a las condiciones siguientes:

1. A dos casos cualesquiera x_1 y x_2 quedará asociado un mismo número $N(x_1)=N(x_2)$ si y sólo si los dos casos son lógicamente equivalentes:

$$(x_1 \longleftrightarrow x_2 \longleftrightarrow [N(x_1)=N(x_2)]$$

En otras palabras, el número asociado a un caso es un invariante de su clase de equivalencia.

2. A dos estatutos deónticos cualesquiera D_1y y D_2y de una acción y quedará asociado un mismo número $N(D_1y)=N(D_2y)$ si y sólo si los dos estatutos son lógicamente equivalentes:

$$(D_1y \longleftrightarrow D_2y) \longleftrightarrow [N(D_1y)=N(D_2y)]$$

En otras palabras, el número asociado al estatuto deóntico de una acción es un invariante de su clase de equivalencia.

3. El número asociado a la disyunción $x_1 v x_2$ de dos casos x_1 y x_2 es el máximo componente binario común (13) —cuya definición daremos a continuación— de los números $N(x_1)$ y $N(x_2)$ asociados a los casos mencionados:

$$N(x_1 v x_2)=[N(x_1), N(x_2)]$$

(12) Llamamos aquí supremo de varios números a su mínimo compuesto binario común, cuya fórmula matemática se precisa más adelante.

(13) La fórmula matemática del máximo componente binario común de varios números —o ínfimo de los mismos— se precisa también más adelante.

4. El número asociado a la disyunción de dos estatutos deónticos D_1y y D_2y de una acción y es el máximo componente binario común de los números $N(D_1y)$ y $N(D_2y)$ asociados a los estatutos mencionados:

$$N[(D_1y)v(D_2y)]=[N(D_1y), N(D_2y)]$$

5. El número asociado a la conjunción $x_1 \cdot x_2$ de dos casos es el mínimo compuesto binario común (14) —cuya definición daremos a continuación— de los números $N(x_1)$ y $N(x_2)$ asociados a los casos mencionados:

$$N(x_1 \cdot x_2)=[N(x_1), N(x_2)]$$

6. El número asociado a la conjunción de dos estatutos deónticos D_1y y D_2y de una acción y es el mínimo compuesto binario común de los números $N(D_1y)$ y $N(D_2y)$ asociados a los estatutos mencionados:

$$N[(D_1y) . (D_2y)]=[N(D_1y), N(D_2y)]$$

7. El número asociado a toda tautología es 0 (cero): $N(t)=0$.

8. El número asociado al sistema α (interpretado como conjunción de todos sus enunciados normativos) es 1 (la unidad positiva): $N(\alpha)=1$.

9. El número asociado a:

   a) toda conjunción de casos contradictorios;
   b) toda conjunción de estatutos débiles contradictorios es $f=2^{n+1}-2$ (número hipersaturado);

10. El número asociado a:

   a) toda conjunción de estatutos contradictorios de los cuales al menos uno sea fuerte (solución);
   b) toda solución inexistente (no definida) en α es $g=2^{n+1}-1$.

11. El número asociado a la negación $-x$ de un caso x (donde x y $-x$ son casos complementarios) es:

$$N(-x)=f-N(x)=\overline{N(x)}$$

(14) Véase la nota (12).

12. El número asociado a la negación externa $\sim D_iy$ de un estatuto deóntico D_iy de una acción y es:

$$N(\sim D_iy) = g - N(D_iy)$$

13. El número asociado a la negación interna $\urcorner D_iy$ del estatuto deóntico D_iy de una acción y es:

$$N(\urcorner D_iy) = g - [N(D_iy), 1] + [N(D_iy), 1)]$$

Esta fórmula asegura que la negación interna de una solución o estatuto fuerte sea también fuerte y la negación interna de un estatuto débil sea también débil.

En efecto, por un lado, $g = 2^{n+1} - 1$ es impar.

Por otro lado, como luego veremos, a todo estatuto fuerte (solución) quedará siempre asociado un número impar y a todo estatuto débil (no solución en α) un número par. Con ello tendremos:

a) Aplicando la fórmula anterior a un estatuto fuerte S_iy de una acción, tendremos:

$[N(S_iy), 1] = N(S_iy)$ impar

$[N(S_iy), 1)] = 1$ impar

y, por lo tanto:

$N(\urcorner S_iy) = g - N(S_iy) + 1$ impar

Habremos obtenido, pues, el número de un estatuto fuerte.

b) Aplicando la fórmula anterior a un estatuto débil W_iy de una acción y tendremos:

$[N(W_iy), 1] = N(W_iy) + 1$ impar

$[N(W_iy), 1) = 0$ par

y, por lo tanto:

$N(\urcorner W_iy) = g - [N(W_iy) + 1] + 0$ par

Habremos obtenido, pues, el número de un estatuto débil.

14. La relación aritmética asociada a la implicación

$$p \rightarrow q$$

entre dos enunciados p y q, de los cuales uno (o ambos) puede(n) corresponder a un caso y el otro (o ambos) a un estatuto deóntico, será la relación de composición binaria:

$$(p \rightarrow q) \longleftrightarrow N(p) \vdots N(q)$$

(p implica q si y sólo si el número asociado a p es un compuesto binario (15) de q —relación que definiremos a continuación—).

Para definir las operaciones y la relación aritméticas mencionadas, expresaremos los números a los que se aplican en forma de sumas de potencias del número 2, todas diferentes entre sí. Así los números N(p) y N(q) quedarán definidos como sigue:

$$N(p) = \sum_{i=0}^{n} p_i x 2^i \qquad (p_i = 0, 1)$$

$$N(q) = \sum_{i=0}^{n} q_i x 2^i \qquad (q_i = 0, 1)$$

Entonces, el máximo componente binario común de N(p) y N(q) será definido del modo siguiente:

$$[N(p), N(q)] = \sum_{i=0}^{n} \text{mín } (p_i, q_i) x 2^i$$

y el mínimo compuesto binario común de N(p) y N(q) del modo siguiente:

$$[(Np), N(q)] = \sum_{i=0}^{n} \text{máx } (p_i, q_i) x 2^i$$

Finalmente, la relación N(p)⋮N(q) —es decir, N(p) es un compuesto binario de N(q)— será definida del modo siguiente:

$$N(p) \vdots N(q) \leftrightarrow (\forall_i) \; p_i \geqslant q_i$$

Consideramos ahora, sobre la base de una correspondencia lógico-aritmética que satisfaga a las condiciones precedentes, el problema de

(15) Un número N(p) es un compuesto binario de otro número N(q) si y sólo si toda potencia de 2 que figura en la expresión binaria de N(q) —expresión de N(q) como suma de potencias de 2, entre sí diferentes— que figura también en la expresión binaria de N(p). La fórmula matemática que define N(p) ⋮ N(q) se dará más adelante.

la traducción aritmética de los casos elementales, de la que pueden deducirse todos los números que han de quedar asociados a los demás casos, ya que, como hemos indicado, cualquier caso puede expresarse en forma de una disyunción de casos elementales y, por lo tanto, su número característico en forma de máximo componente binario común de los números asociados a estos últimos.

Como un caso puede ser calificado de elemental —respecto de un determinado Universo de Propiedades relevantes para la determinación deóntica de una acción o conducta— si y sólo si su conjunción con cualquier propiedad o caso no implicado por él es contradictoria, el número $N(x_e)$ asociado a cualquier caso elemental deberá cumplir la condición aritmética correspondiente en el modelo, a saber, que su composición con cualquier número que no sea un componente suyo dé como resultado el número hipersaturado f, asociado a toda conjunción contradictoria de casos.

Esta condición:

$$[\forall N(x_e)]\ [\forall n(x)]\ [(N(x_e) \vdots N(x)]\ \ v\ \big[[N(x_e),\ N(x)] = f\big]$$

se cumplirá si v sólo si todo número $N(x_e)$ asociado a un caso elemental x_e es de la forma siguiente:

$$N(x_e) = f\text{-}2^i \qquad (i > 0)$$

ya que entonces todo número que no sea componente de $N(x_e)$ deberá tener como componente binario a 2^i, con lo cual su composición con 2^i dará como resultado f.

Si hay n casos elementales, deberán, pues, quedar asociados a los números característicos siguientes:

$$\begin{array}{l} N(x_{e1}) = f - 2^1 \\ N(x_{e2}) = f - 2^2 \\ N(x_{e3}) = f - 2^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N(X_{en}) = f - 2^n \end{array}$$

Veamos ahora cómo debemos encontrar los números que han de quedar asociados a los estatutos deónticos de una acción y, y que estén definidos en el sistema para un caso elemental, al menos.

Si un caso elemental x_{ei} implica en el sistema α una solución S_iy, podemos escribir:

$$(x_{ei} \rightarrow S_iy) \in Cn(\alpha)$$

(El enunciado «el caso x_{ei} implica la solución S_iy» pertenece al conjunto de las consecuencias lógicas del sistema normativo α), y —de acuerdo con el teorema de la deducción de Tarski— podremos escribir también la fórmula que, con arreglo al mismo, resulta lógicamente equivalente a la anterior:

$$\alpha \cdot x_{ei} \rightarrow S_iy$$

[La conjunción de los enunciados de α y el enunciado x_{ei} (16) implica el anunciado S_iy].

La relación aritmética asociada en el modelo a esta relación de implicación lógica, es la siguiente:

$$[N(\alpha), N(x_{ei})] \vdots N(S_iy)$$

que podremos leer del modo siguiente: «El mínimo compuesto binario común del número asociado a α (que es la unidad positiva) y el número asociado a un caso x_{ei} que tiene como consecuencia en α el estatuto deóntico S_iy de la acción y tiene como componente binario el número asociado a dicho estatuto».

Sustituyendo en la fórmula precedente $n(\alpha)$ por su valor, que es la unidad, tendremos:

$$[N(x_{ei}) + 1] \vdots S_iy$$

Supongamos ahora que en el sistema α hay k casos x_{e1}, ..., x_{ek} que tienen como consecuencia en el mismo la solución S_iy.

Podremos escribir entonces:

$$\alpha \cdot x_{e1} \rightarrow S_iy$$
$$\alpha \cdot x_{e2} \rightarrow S_iy$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha \cdot x_{ek} \rightarrow S_iy$$

de donde podremos deducir la implicación siguiente:

$$\alpha \cdot (x_{e1} \vee x_{e2} \vee \ \ldots \ \vee x_{ek}) \rightarrow S_iy \qquad (*)$$

Pero, en el supuesto de que los únicos casos elementales que implican en α la solución S_iy sean —como hemos indicado— los k casos enumerados, también tendremos que dicha solución implicará la disyunción de esos casos, junto con α:

$$S_iy \rightarrow \alpha \cdot (x_{e1} \vee x_{e2} \vee \ \ldots \ \vee x_{ek}) \qquad (**)$$

(16) Aquí un sistema normativo α se considera como un único enunciado, equivalente a la conjunción de todas sus normas.

De las dos implicaciones inversas, podemos deducir la equivalencia siguiente:

$$\alpha\cdot(x_{e1} \vee x_{e2} \vee \ldots \vee x_{ek}) \leftrightarrow S_i y$$

que tiene asociada en el modelo la igualdad aritmética siguiente:

$$N(S_i y) - [N(x_{e1}), N(x_{e2}), \ldots, N(x_{ek})] + 1$$

En otras palabras: El número asociado en el modelo aritmético del sistema α a la solución $S_i y$ de k casos elementales es igual al máximo componente binario común de los números asociados a estos últimos, incrementado en una unidad.

Está claro que si los otros $n - k$ casos elementales tuvieran todos como consecuencia lógica en el sistema α otra solución S_j y distinta de $S_i y$, el número asociado a éste se obtendría igualmente incrementando en una unidad el máximo componente binario común de los $n - k$ números asociados a estos otros casos.

Supongamos ahora que el sistema α es incompleto y que, de sus casos n, sólo los k casos antes considerados tienen solución —a saber, la ya indicada $S_i y$—, mientras que los otros $n - k$ casos no la tienen. En este supuesto lo único que se sabe de estos $n - k$ casos:

$$\begin{array}{c} x_{e(k+1)} \\ x_{e(k+2)} \\ \ldots\ldots \\ x_{en} \end{array}$$

es que no implican la solución $S_i y$. Tienen, por ello, un estatuto deóntico débil, equivalente a la negación externa del estatuto deóntico fuerte $S_i y$.

Sea este estatuto deóntico débil $W_j y$.

Escribiremos entonces la equivalencia:

$$(x_{e(k+1)} \vee x_{e(k+2)} \vee \ldots \vee x_{en}) \leftrightarrow, \; W_i y \leftrightarrow \sim S_i y$$

a la que le corresponde la siguiente igualdad aritmética:

$$N(W_j y) = [N(x_{e(k+1)}), N(x_{e(k+2)}), \ldots, N(x_{en})] = g - N S_i y) \; (17)$$

con lo cual habremos encontrado el número asociado al estatuto deóntico de la acción y en cualquiera de los $n - k$ casos elementales que no tienen solución en el sistema α.

(17) La igualdad $N(W_i y) = g \times N(S_i y)$ sólo es válida en general, como veremos si el sistema α es coherente.

Esta representación aritmética de los conjuntos de normas que determinan el estatuto deóntico de una acción puede tener a la vez un alcance teórico y práctico.

Desde el punto de vista teórico, puede construirse sobre esta base un modelo aritmético de la Lógica de las proposiciones normativas desarrollada por Alchourrón y Bulygin en su obra fundamental *Normative Systems* (18), pudiéndose demostrar todos los teoremas establecidos en el apéndice de dicha obra (19), ya asociando a las variables de casos y a los estatutos deónticos de las acciones indeterminadas variables numéricas, ya asociando a unas y a otros números enteros arbitrarios, que satisfagan, sin embargo, las relaciones aritméticas correspondientes a las relaciones lógicas entre los componentes —casos o soluciones— a los que están asociados.

Desde el punto de vista práctico, puede construirse sobre la misma base un modelo aritmético de cualquier conjunto de normas concretas que determinen el estatuto deóntico de una única acción concreta en algunos casos concretos, asociando entonces a estos casos y a los estatutos deónticos que implican constantes numéricas (números enteros positivos) obtenidos por el procedimiento que hemos indicado de los números de forma $f—2^{i}$ que hayamos asociado a los casos elementales.

Cuando el modelo aritmético se utiliza para el estudio de la Lógica de las proposiciones normativas y la verificación aritmética de sus teoremas, se puede suponer, sin inconveniente alguno, que todas las posibles soluciones o estatutos deónticos fuertes de una acción no determinada y están presentes y definidos en el sistema α y, por tanto, tienen atribuidos números característicos distintos del número g ($g=2^{n.1}—1$) y menores que este número, que corresponde a las soluciones inexistentes en el sistema, o, si se quiere, no definidas en el mismo.

Por el contrario, cuando el modelo aritmético se utiliza para estudiar sistemas normativos concretos, sólo es lícito atribuir números característicos distintos de g —y precisamente los números que resulten de los cálculos indicados— a las soluciones que corresponden efectivamente en el sistema a algún caso elemental concreto, atribuyéndose

(18) Véase el apéndice de esta importante obra y, en especial, las páginas 256-263 de su edición castellana, que figura en la bibliografía (2).

(19) Algunos de tales teoremas resultan aritméticamente demostrados o verificados en distintas partes de este trabajo, así como las definiciones de coherencia y de completitud dadas por Alchourrón y Bulygin.

el número g a todas las soluciones vacías que no corresponden a ningún caso.

Vamos a considerar primero un ejemplo de aplicación teórica del modelo en el marco de la mencionada teoría de Alchourrón y Bulygin y luego algunos ejemplos de aplicación práctica a sencillos conjuntos de normas, como los extraídos por los mencionados autores del Código Civil argentino, relativos a la enajenación de bienes inmuebles que son propiedad de terceros o el que yo he extraído del Código Civil español, relativo al Derecho de familia.

Consideremos, pues, primeramente un sistema normativo abstracto α, del cual sólo fijaremos las siguientes características generales:

1. El sistema α es completo, en el sentido de que en el mismo todo caso elemental implica alguna solución o estatuto deóntico fuerte y toda solución posible es implicada o excluida por cada caso elemental (20).

2. El sistema α es coherente, en el sentido de que en el mismo ningún caso elemental implica dos estatutos deónticos contradictorios —ni incompatibles— de la acción y, por ejemplo:

a) $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy}$ (y está fuertemente prohibida) y $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{sy}$ (y está fuertemente permitida).

b) $\underset{\alpha}{\mathrm{O}}\mathrm{sy}$ (y es fuertemente obligatoria) y $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{s}\text{—}\mathrm{y}$ (la omisión de y está fuertemente permitida) (21).

3. Todas las soluciones o estatutos deónticos fuertes posibles de la acción y están representados en el sistema α, en el sentido de que para cada una de esas soluciones (maximales o minimales) hay algún caso elemental que la implica en α. Para ello es suficiente —una vez aceptadas las características 1 y 2— que las tres soluciones maximales $\underset{\alpha}{\mathrm{O}}\mathrm{sy}$, $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy}$ y $\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy}$ estén representadas o definidas en el sistema (es decir, implicadas por un caso elemental, al menos), ya que cada una de las tres soluciones restantes (minimales) equivale a una disyunción de dos maximales, con arreglo a las siguientes equivalencias (22):

$$\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{sy} \leftrightarrow \underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy} \vee \underset{\alpha}{\mathrm{O}}\mathrm{sy}$$
$$\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{s}\text{—}\mathrm{y} \leftrightarrow \underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy} \vee \underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy}$$
$$\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{sy} \leftrightarrow \underset{\alpha}{\mathrm{O}}\mathrm{sy} \vee \underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy}$$

(20) Véase 2. pp. 249-250. pp. 260-261.
(21) Véase 2. pp. 250-251. p. 262.
(22) Compárense con las expresiones de las seis modalidades deónticas (maximales y minimales) dadas en 2. p. 78.

DA-1983, núm. 199. MIGUEL SÁNCHEZ-MAZAS. Sistemas normativos, sistemas de Bertalanffy y re...

[La introducción de $\underset{\alpha}{U}sy$, que equivale a la negación interna de $\underset{\alpha}{F}sy$, es decir, a $\neg\!\top \underset{\alpha}{F}sy$, se efectúa aquí siguiendo la orientación de Blanché y Kalinowski —que consideran conveniente disponer de una expresión para designar el carácter reglado o prescrito (obligatorio o prohibido) de una acción—, como ya venimos haciendo desde hace algunos años en diversos trabajos sobre Lógica deóntica (23)].

4. En virtud del punto anterior, será lícito atribuir a cada una de las soluciones un número característico menor que g.

5. Con ello, cada estatuto débil tendrá también atribuido su número característico, que podrá obtenerse mediante cálculo del número asociado a la solución o estatuto fuerte equivalente a la negación externa del primero, con arreglo al siguiente cuadro de equivalencias (24):

$$
\begin{array}{rl}
\underset{\alpha}{P}wy \leftrightarrow & \sim \underset{\alpha}{P}hsy \leftrightarrow \sim \underset{\alpha}{O}s - y \\
\underset{\alpha}{P}w - y \leftrightarrow & \sim \underset{\alpha}{O}sy \\
\underset{\alpha}{F}wy \leftrightarrow & \sim \underset{\alpha}{U}sy \\
\underset{\alpha}{P}hwy \leftrightarrow & \underset{\alpha}{P}sy \\
\underset{\alpha}{O}wy \leftrightarrow & \underset{\alpha}{P}s - y \\
\underset{\alpha}{U}wy \leftrightarrow & \underset{\alpha}{F}sy
\end{array}
$$

Supondremos, además, que:

6. Las propiedades del Universo de Propiedades tomado en consideración son dos (es decir, m=2) e independientes entre sí, con lo cual el número de casos elementales es $2^2=4$ (es decir, n=4) y los números f y g tienen los valores siguientes:

$$f = 2^{n+1} - 2 = 2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$$
$$g = 2^{n+1} - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

7. Han quedado asociados a dos estatutos fuertes o soluciones maximales —a saber, $\underset{\alpha}{O}sy$ y $\underset{\alpha}{P}hsy$—, lo suficiente para la determinación de los 16 estatutos posibles, los números característicos siguientes:

$$N(\underset{\alpha}{O}sy) = 11$$
$$N(\underset{\alpha}{P}hsy) = 29$$

(23) Véase, por ejemplo, mi trabajo 6, p. 177.
(24) Véase 2, pp. 257-258.

Estos números son tales, como veremos, que las condiciones de completitud y coherencia que hemos supuesto en los puntos 1 y 2, así como la condición supuesta en el punto 3, de que las tres soluciones maximales $\underset{\alpha}{O}sy$, $\underset{\alpha}{P}hsy$ y $\underset{\alpha}{F}sy$ estén definidas en el sistema α —necesaria y suficiente para que los 12 estatutos deónticos posibles de la acción y estén definidos o representados en α— quedan satisfechas.

En efecto, de acuerdo con el valor de f (f=30) fijado en el punto 6 (f=30), los números asociados a los cuatro casos elementales son los siguientes:

$$N(x_{e1}) = 30 - 2^1 = 30 - 2 = 28$$
$$N(x_{e2}) = 30 - 2^2 = 30 - 4 = 26$$
$$N(x_{e3}) = 30 - 2^3 = 30 - 8 = 22$$
$$N(x_{e4}) = 30 - 2^4 = 30 - 16 = 14$$

Ahora bien, puede comprobarse que:

— El caso elemental x_{e1} implica $\underset{\alpha}{P}shy$, ya que $(28+1) \vdots 29$.

— El caso elemental x_{e2} implica $\underset{\alpha}{O}sy$, ya que $(26+1) \vdots 11$.

— El caso elemental x_{e4} implica $\underset{\alpha}{O}sy$, ya que $(14+1) \vdots 11$.

Por otra parte, el número asociado a $\underset{\alpha}{U}sy$ que, como hemos visto, es la disyunción de $\underset{\alpha}{O}sy$ y $\underset{\alpha}{P}hsy$ viene dado por el máximo componente binario común de los números de éstos:

$$N(\underset{\alpha}{U}sy) = N[(\underset{\alpha}{O}sy) \vee (\underset{\alpha}{P}hsy)] =$$
$$= [N(\underset{\alpha}{O}sy), N(\underset{\alpha}{P}hsy)] = (11, 29) = 9$$

y el de $\underset{\alpha}{F}sy$, que es la negación interna de $\underset{\alpha}{U}sy$, del modo siguiente:

$$N(\underset{\alpha}{F}sy) = N(\neg \underset{\alpha}{U}sy) =$$
$$= g - [9, 1] + (9, 1) = 31 - 9 + 1 = 23$$

Podemos deducir de ello que el caso elemental restante, x_{e3}, que, de acuerdo con la condición supuesta en 1, debe implicar también una solución maximal y, de acuerdo con la condición supuesta en 3, debe implicar precisamente la solución no implicada por los otros casos y, por ello, aún no definida en α, implicará esa solución, a saber, $\underset{\alpha}{F}sy$. Pondremos así:

— El caso elemental x_{e3} implica $\underset{\alpha}{F}sy$, ya que $(22+1) \vdots 23$.

La condición 3 queda cumplida con ello, pues las tres soluciones maximales están implicadas por algún caso elemental. La condición de completitud establecida en 1 queda también cumplida, por cuanto todo caso elemental implica una solución maximal y, con ello, implica las dos minimales subalternas de ésta y excluye las tres opuestas según la negación interna a las tres implicadas. Cada solución (maximal o minimal) es así ya implicada, ya excluida por cada caso elemental.

En cuanto a la condición de coherencia, supuesta en el punto 2, podemos comprobar, ante todo, que las tres soluciones maximales consideradas resultan, con arreglo a los números asociados a las mismas, incompatibilidades dos a dos —condición necesaria para la coherencia—, ya que el número asociado a la conjunción de dos cualesquiera de ellas es el número g (g=31) asociado, como sabemos, a toda conjunción contradictoria de soluciones (condición 10 a) del conjunto de condiciones de la correspondiencia logicoaritmética en que se basa el modelo:

$$N(\underset{\alpha}{O}sy \cdot \underset{\alpha}{P}hsy) = [N(\underset{\alpha}{O}sy),\ N(\underset{\alpha}{P}hsy)] = [11, 29] = 31$$
$$N(\underset{\alpha}{O}sy \cdot \underset{\alpha}{F}sy) = [N(\underset{\alpha}{O}sy),\ N(\underset{\alpha}{F}sy)] = [11, 23] = 31$$
$$N(\underset{\alpha}{P}hsy \cdot \underset{\alpha}{F}sy) = [N(\underset{\alpha}{P}hsy),\ N(\underset{\alpha}{F}sy)] = [29, 23] = 31$$

Q. E. D.

Sin embargo, comprobaremos más directamente la coherencia del sistema en cuanto hayamos calculado los números característicos de los restantes estatutos deónticos y examinado de qué modo la condición de coherencia establecida en 2 se cumple para cada caso elemental.

Del número asociado a $\underset{\alpha}{O}sy$ podemos deducir los números asociados a $\underset{\alpha}{P}s-y$, $\underset{\alpha}{P}w-y$ y $\underset{\alpha}{O}wy$, teniendo en cuenta las equivalencias siguientes (25), que, de acuerdo con las condiciones de la correspondencia logicoaritmética en que se basa el modelo, se traducen por las ecuaciones que también damos a continuación:

$$\underset{\alpha}{P}s-y \leftrightarrow \neg T\underset{\alpha}{O}sy \qquad N(\underset{\alpha}{P}s-y) = N(\neg T\underset{\alpha}{O}sy) = 31-[11, 1]+(11, 1)=21$$
$$\underset{\alpha}{P}w-y \leftrightarrow \sim\underset{\alpha}{O}sy \qquad N(\underset{\alpha}{P}w-y) = (\sim\underset{\alpha}{O}sy) = 31-11=20$$
$$\underset{\alpha}{O}wy \leftrightarrow \sim\underset{\alpha}{P}s\times y \qquad N(\underset{\alpha}{O}wy) = N(\sim\underset{\alpha}{P}s-y) = 31-21=10$$

(25) Las seis primeras corresponden a los teoremas T 91′, T 83′, T 89′, T 96′, T 90′ y T 84′ de Alchourrón y Bulygin, 2, pp. 257-259.

DA-1983, núm. 199. MIGUEL SÁNCHEZ-MAZAS. Sistemas normativos, sistemas de Bertalanffy y re...

Del número asociado a $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy}$ podemas deducir los números asociados a $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{sy}$, $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{wy}$ y $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hwy}$, de un modo análogo al anterior:

$$
\begin{array}{llll}
\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{sy} \leftrightarrow \top\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy} & \mathrm{N}(\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{sy}) & = \mathrm{N}(\top\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy}) & = 31 - [29, 1] + (29, 1) = 3 \\
\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{wy} \leftrightarrow \sim\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy} & \mathrm{N}(\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{wy}) & = \mathrm{N}(\sim\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy}) & = 31 - 29 = 2 \\
\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hwy} \leftrightarrow \sim\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{sy} & \mathrm{N}(\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hwy}) & = \mathrm{N}(\sim\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{sy}) & = 31 - 3 = 28
\end{array}
$$

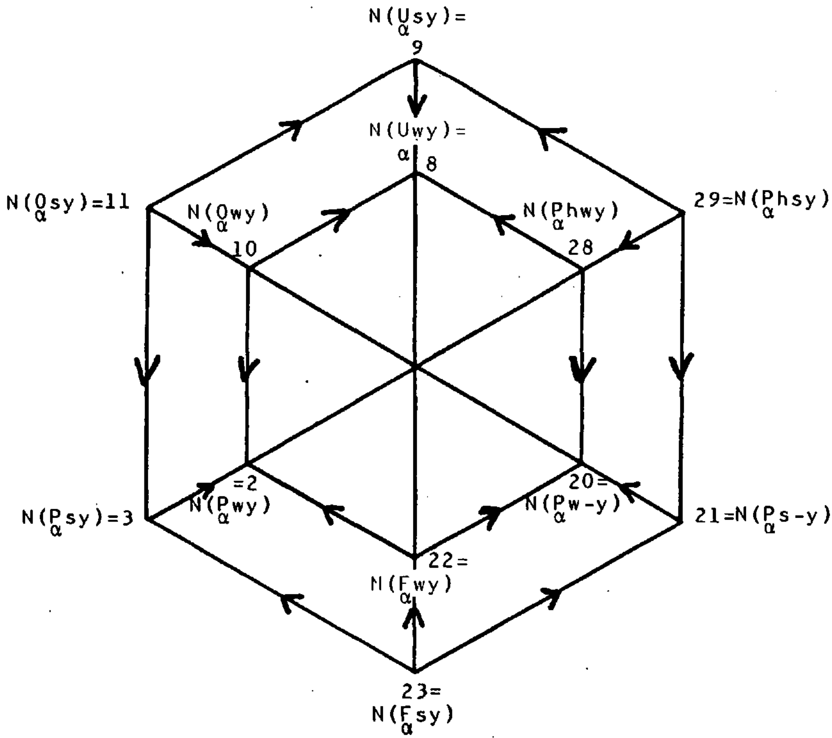
Por último, del número asociado a $\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy}$ deduciremos los números asociados a $\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{sy}$, $\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{wy}$ y $\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{wy}$, de un modo análogo:

$$
\begin{array}{llll}
\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{sy} \leftrightarrow \top\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy} & \mathrm{N}(\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{sy}) & = \mathrm{N}(\top\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy}) & = 31 - [23, 1] + (23, 1) = 9 \\
\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{wy} \leftrightarrow \sim\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy} & \mathrm{N}(\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{wy}) & = \mathrm{N}(\sim\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy}) & = 31 - 23 = 8 \\
\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{wy} \leftrightarrow \sim\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{sy} & \mathrm{N}(\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{wy}) & = \mathrm{N}(\sim\underset{\alpha}{\mathrm{U}}\mathrm{sy}) & = 31 - 9 = 23
\end{array}
$$

Traslademos ahora los 12 estatutos deónticos posibles de la acción y, con sus números característicos, al gráfico II.

GRAFICO II

REPRESENTACION GEOMETRICA Y ARITMETICA DE LAS RELACIONES LOGICAS ENTRE LOS 12 ESTATUTOS DEONTICOS POSIBLES DE UNA ACCION



1. Los distintos tipos de implicación entre estatutos.

Tanto en el hexágono exterior (estatutos fuertes o soluciones) como en el interior (estatutos débiles), cada uno de los estatutos maximales (acción obligatoria, prohibida o facultativa) implica dos minimales (acción permitida, omisión permitida o acción reglada), según indican las flechas.

Al mismo tiempo, cada solución o estatuto fuerte del hexágono exterior implica el estatuto débil correspondiente (del mismo nombre)

DA-1983, núm. 199. MIGUEL SÁNCHEZ-MAZAS. Sistemas normativos, sistemas de Bertalanffy y re...

del hexágono interior, según también indican las flechas, aunque aquí debemos recordar que la implicación sólo es válida en los sistemas normativos coherentes —en los que ningún caso implica soluciones entre sí incompatibles— como el sistema abstracto que ahora estamos considerando.

Como se verá en el gráfico, en todas las implicaciones el número asociado al antecedente tiene como componente binario el número asociado al consecuente.

2. Los distintos tipos de oposición entre estatutos.

En cada una de las diagonales que se cruzan en el centro común de los dos hexágonos —diagonales de las oposiciones—, los extremos del segmento máximo, ambos situados en el hexágono exterior y cuyos números característicos suman $g+1=32$, representan soluciones o estatutos fuertes que se oponen según la negación interna.

En cada una de esas diagonales también, los extremos del segmento mínimo, ambos situados en el hexágono interior y cuyos números característicos suman $f=30$, representan estatutos débiles que se oponen también según la negación interna.

Finalmente, en cada una de esas diagonales, los extremos de los dos segmentos de longitud intermedia, situados uno en el hexágono exterior y otro en el interior y cuyos números característicos suman $g=31$, representan estatutos de tipo distinto (uno fuerte y otro débil) que se oponen según la negación externa.

Aplicando a un estatuto cualquiera primero la negación interna y luego la externa o viceversa se pasa de un estatuto fuerte al débil correspondiente (del mismo nombre) o viceversa. Numéricamente, ese paso se traduce en el cambio de paridad, perdiendo una unidad los números pares y ganándola los impares.

He aquí las fórmulas generales para estatutos fuertes S_iy y débiles W_iy, respectivamente:

1. $N(\sim\top S_iy)=g-N(\top S_iy)=$
$=g-[g-[N(S_iy),\ 1]+[N(S_iy),\ 1]]=$
$=g-[g-N(S_iy)+1]=N(S_i\ y)-1=N(W_iy)$

2. $N(\sim\top W_iy)=g-N(\top W_iy)=$
$=g-[g-[N(W_iy),\ 1]+[N(W_iy),\ 1]]=$
$=g-[g-[N(W_iy)+1]+o]=$
$=N(W_iy)+1=N(S_iy)$

3. $N(\top \sim S_i y) = g - [N(\sim S_i y), 1] + [N(\sim S_i y), 1] =$
$= g - [g - N(S_i y), 1] + [g - N(S_i y), 1] =$
$= g - [g - N(S_i y) + 1] + 0 =$
$= N(S_i y) - 1 = N(W_i y)$

4. $N(\top \sim W_i y) = g - [N(\sim W_i y), 1] + [N(\sim W_i y), 1] =$
$= g - [g - N(W_i y), 1] + [g - N(W_i y), 1] =$
$= g - [g - N(W_i y) + 1 =$
$= N(W_i y) + 1 = N(S_i y)$

Q.E.D. (26)

Terminemos esta parte demostrando rigurosamente la coherencia del sistema normativo abstracto α que hemos construido.

Tenemos los cuatro casos elementales siguientes:

x_{e1} cuyo número asociado es $N(x_{e1}) = 28 = 16 + 8 + 4$
x_{e2} cuyo número asociado es $N(x_{e2}) = 26 = 16 + 8 + 2$
x_{e3} cuyo número asociado es $N(x_{e3}) = 22 = 16 + 4 + 2$
x_{e4} cuyo número asociado es $N(x_{e4}) = 14 = 8 + 4 + 2$

Examinemos el caso de x_{e1}:

La conjunción de x_{e1} y α, al tener como número asociado el 29 implica todos los estatutos cuyo número asociado es un componente de 29, luego:

$\underset{\alpha}{P}hsy$ por ser $N(\underset{\alpha}{P}hsy) = 29$, pero no $\underset{\alpha}{P}sy$ por ser $N(\underset{\alpha}{P}sy) = 3$, ni $\underset{\alpha}{P}wy$ por ser $N(\underset{\alpha}{P}wy) = 2$;

$\underset{\alpha}{P}s-y$ por ser $N(\underset{\alpha}{P}s-y) = 21 = 16 + 4 + 1$, pero no $\underset{\alpha}{O}sy$ por ser $N(\underset{\alpha}{O}sy) = 11$, ni $\underset{\alpha}{O}wy$ por ser $N(\underset{\alpha}{O}wy) = 10$;

$\underset{\alpha}{U}sy$ por ser $N(\underset{\alpha}{U}sy) = 9 = 8 + 1$, pero no $\underset{\alpha}{F}sy$ por ser $N(\underset{\alpha}{F}sy) = 23 = 16 + 4 + 2 + 1$, ni $\underset{\alpha}{F}wy$ por ser $N(\underset{\alpha}{F}wy) = 22 = 16 + 4 + 2$.

Los seis estatutos deónticos excluidos por x_{e1} tienen todos, en efecto, números asociados compuestos del número 2, que no es un componente de $N(x_{e1})$.

(26) Resumen, entre otros, todos los teoremas desde T 95' hasta T 98' de Alchourrón y Bulygin en los que figuran modalidades deónticas precedidas de las dos negaciones, externa e interna. Véase 2, p. 259.

Análogamente, x_{e2} implica todos los estatutos cuyos números asociados están compuestos exclusivamente de 16, de 8 o de 2, pero excluye todos los estatutos incompatibles con los incluidos, por tener sus asociados el componente 4, del que carece $N(x_{e2})$.

Análogamente, x_{e3} implica todos los estatutos cuyos números asociados están compuestos exclusivamente de 16, de 4 o de 2, pero excluye todos los estatutos incompatibles con los incluidos, por tener sus asociados el componente 8, del que carece $N(x_{e3})$.

Finalmente, x_{e4} implica todos los estatutos cuyos números asociados están compuestos exclusivamente de 8, de 4 o de 2, pero excluye todos los estatutos incompatibles con los incluidos, por tener sus asociados el componente 16, del que carece $N(e_{x4})$.

Q.E.D.

Pasemos ahora a estudiar los procedimientos más apropiados para la aplicación práctica de este tipo de traducción aritmética de los componentes (casos y soluciones de las normas, así como de las relaciones lógicas y deónticas entre los mismos a la construcción de redes numéricas de los sistemas normativos que proporcionen, no sólo un lenguaje racional, uniforme y universal —por su independencia de los lenguajes naturales— para la codificación y la memorización de aquéllos, sino, al mismo tiempo, un instrumento directo para el cálculo automático de las consecuencias de cualquier sistema, su comparación lógica con otros —análisis sistemático de las coincidencias y discrepancias en las soluciones dadas a casos idénticos— y otras finalidades que pueden interesar a los juristas, en sus crecientes esfuerzos de racionalización y de tratamiento informático del Derecho.

Empecemos considerando el problema normativo propuesto por Alchourrón y Bulygin en *Normative Systems* (27) como problema tipo para la construcción de su modelo lógico de los sistemas normativos y veamos el procedimiento más práctico y sencillo para el hallazgo de la red numérica $R(\alpha)$ que debe asociarse al sistema normativo α que ofrece soluciones a ese problema, en las distintas variantes estudiadas por los mencionados autores (28), derivadas ya del Código civil argentino, ya de las propuestas de distintos juristas, en un esfuerzo por suprimir a la vez las tres imperfecciones formales posibles de un sistema normativo: la incompletitud (casos sin solución), la incoheren-

(27) Véase 2, pp. 32 y ss.

(28) Por ejemplo, el Código de Freitas, artículos 3.877, 3.878 y 3.882 Código Civil argentino: artículos 2.777 y 2.778, etc., 2, pp. 38-49, resumidas en la tabla 1-4 de la página 46.

cia (casos resueltos con varias soluciones, entre sí incompatibles) y la redundancia (repetición de una misma correlación entre un caso y su solución por más de una norma).

El mencionado problema normativo se refiere, como es sabido, a la restitución, obligatoria o facultativa, de bienes inmuebles enajenados por terceros poseedores que no son sus legítimos propietarios, en los distintos casos que pueden considerarse por las distintas conjunciones posibles de tres propiedades relevantes para la solución del problema, a saber, buena fe del adquirente (que designaremos simbólicamente por 'a'), buena fe del enajenante (que designaremos por 'e') y título oneroso de la adquisición (que designaremos por 'o') y sus complementarias, es decir, mala fe del adquirente (no a o —a), mala fe del enajenante (no e o —e) y título gratuito de la adquisición (no o u —o), siempre que la conjunción no sea contradictoria, es decir, no incluya una propiedad y su complementaria.

Se supone que las tres propiedades del Universo de Propiedades relevantes elegido son lógicamente independientes entre sí. Con ello tendremos:

m (número de propiedades del UP) $= 3$
n (número de casos elementales) $= 2^m = 2^3 = 8$
f (número hipersaturado) $= 2^{n+1} - 2 =$
$= 2^{8+1} - 2 = 2^9 - 2 = 512 - 2 = 510$
g (número asociado a la conjunción de soluciones incompatibles) $=$
$= 2^{n+1} - 1 = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$

Partiendo, pues de los tres pares siguientes de propiedades complementarias:

a = buena fe del adquirente;	—a = mala fe del adquirente;
e = buena fe del enajenante;	—e = mala fe del enajenante;
o = título oneroso de la adquisición;	—o = título gratuito de la adquisición,

construyamos un árbol que, partiendo de la tautología de casos (a o no a, e o no e, o u no o) y bifurcándose en dos propiedades complementarias cualesquiera (por ejemplo, a y —a), nos permita llegar, por bifurcaciones sucesivas, a los ocho casos elementales, que han de constituir la base para la construcción de la red numérica, a partir de los números asociados a los mismos.

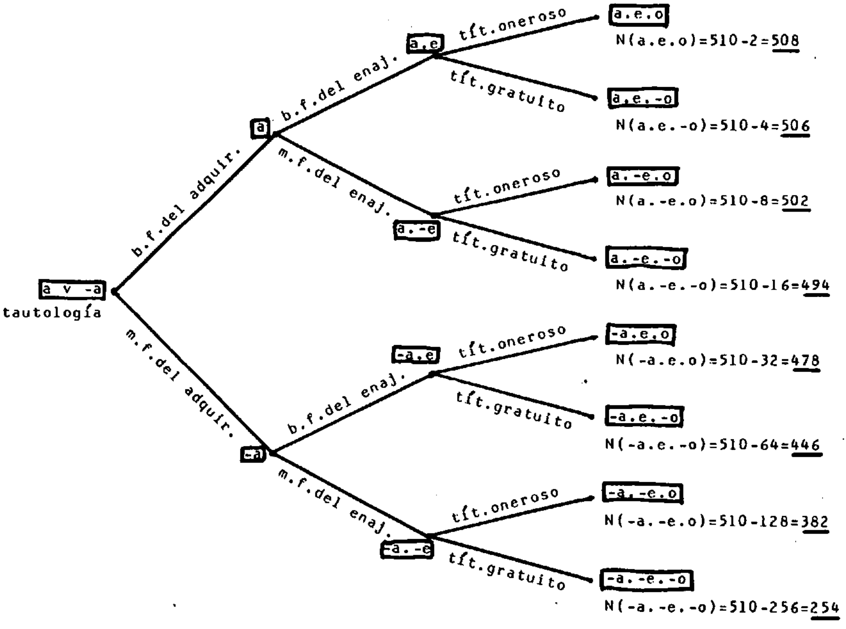
Como ya hemos indicado, los números asociados a los casos elementales habrán de ser de la forma siguiente:

$$N(x_{ei}) = f - 2^i = 510 - 2^i \quad (i > 0) \quad \text{(Gráfico III)}$$

GRAFICO III

ARBOL PARA LA OBTENCION DE LOS CASOS ELEMENTALES DETERMINANTES DEL ESTATUTO DEONTICO DE LA ACCION R (RESTIRUCION), A PARTIR DE TRES PROPIEDADES RELEVANTES

$$f = 2^{n+1} - 2 = 2^9 - 2 = 512 - 2 = 510$$



A partir de los números característicos atribuidos a los casos elementales y aplicando a los mismos la operación aritmética asociada a la disyunción lógica —a saber, el máximo componente binario común de los números asociados a los componentes de la disyunción—, obtendremos los números característicos de todos los casos complejos y, en particular, de todas las disyunciones de casos que implican —solos o en conjunción con α, respectivamente, un mismo estatuto débil o un mismo estatuto fuerte (solución), cuyo número asociado podremos así calcular.

Los números asociados a las propiedades del Universo de Propiedades y a sus complementarias pueden calcularse inmediatamente a partir de los asociados a los casos elementales si expresamos primeramente tales propiedades en forma normal disyuntiva:

$$
\begin{aligned}
a &\leftrightarrow (a.e.o) \vee (a.e.—o) \vee (a.—e.o) \vee (a.—e.—o) \\
—a &\leftrightarrow (—a.e.o) \vee (—a.e.—o) \vee (—a.—e.o) \vee (—a.—e.—o) \\
e &\leftrightarrow (a.e.o) \vee (a.e.—o) \vee (—a.e.o) \vee (—a.e.—o) \\
—e &\leftrightarrow (a.—e.o) \vee (a.—e—o) \vee (—a.—e.o) \vee (—a.—e.o) \\
o &\leftrightarrow (a.e.o) \vee (a.—e.o) \vee (—a.e.o) \vee (—a.—e.o) \\
—o &\leftrightarrow (a.e.—o) \vee (a.—e.—o) \vee (—a.e.—o) \vee (—a.—e.—o)
\end{aligned}
$$

aplicamos luego a los números asociados a los casos elementales que figuran en cada disyunción la operación aritmética asociada a la disyunción lógica que es, como sabemos, el máximo componente binario común.

Las operaciones —que pueden realizarse manualmente o, mejor, utilizando una calculadora programable, de acuerdo con un programa como el «Calculus Ratiocinator II» que yo he elaborado para la Hewlett-Packard 9815 S (29)— y sus respectivos resultados son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
N(a) &= (508,\ 506,\ 502,\ 494) = 480 \\
N(—a) &= (478,\ 446,\ 382,\ 254) = 30 \\
N(e) &= (508,\ 506,\ 478,\ 446) = 408 \\
N(—e) &= (502,\ 494,\ 382,\ 254) = 102 \\
N(o) &= (508,\ 502,\ 478,\ 382) = 340 \\
N(—o) &= (506,\ 494,\ 446,\ 254) = 170
\end{aligned}
$$

(29) En ese pequeño ordenador portátil puedo tratar sistemas normativos compuestos de normas que determinan el estatuto deóntico de casos construidos a partir de un Universo de Propiedades de hasta cinco propiedades, lo cual supone $2^5=32$ casos elementales y $2^{32}—2=4.294.967.294$ casos en total, con un valor de $g=2^{33}—1=8.589.934.591$.

Se observará que los números correspondientes a dos propiedades complementarias suman siempre $f=510$, como está previsto.

Consideramos ahora el sistema completo y coherente (30) de normas, que Alchourrón y Bulygin designan como S_2 y definen por las cuatro normas N_3, N_4, N_5 y N_6 que expresaremos simbólicamente mediante las fórmulas siguientes:

$$N_3: -o \, . \, \alpha \qquad \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

$$N_4: \quad a \, . \, e \, . \, o \, . \, \alpha \qquad \rightarrow \underset{\alpha}{F}sr$$

$$N_5: \quad a \, . -e \, . \, o \, . \, \alpha \qquad \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

$$N_6: -a \, . \, o \, . \, \alpha \qquad \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

Como el único caso elemental que implica en el sistema la solución $\underset{\alpha}{F}sr$ es, según la norma N_4, el definido por la conjunción $a \, . \, e \, . \, o \, . \, \alpha$, podemos, sin más, escribir:

$$a \, . \, e \, . \, o \, . \, \alpha \leftrightarrow \underset{\alpha}{F}sr$$

relación lógica cuya relación aritmética asociada es la **siguiente:**

$$N(\underset{\alpha}{F}sr) = [N(a \, . \, e \, . \, o), \, N(\alpha)]$$

Ahora bien, el valor de $N(a \, . \, e \, . \, o) = 508$, según el árbol del gráfico III, y el valor de $N(\alpha) = 1$, de modo que tendremos:

$$N(\underset{\alpha}{F}sr) = [508, \, 1] = 508 + 1 = \boxed{509}$$

Análogamente, teniendo en cuenta que los tres únicos casos elementales que implican la solución Osr son los definidos, respectivamente, por las conjunciones $-o \, . \, \alpha$, $a \, . -e \, . \, o \, . \, \alpha$ y $-a \, . \, o \, . \, \alpha$ (según las normas N_3, N_5 y N_6), podremos escribir que su disyunción es equivalente a dicha solución:

$$(-o \, . \, \alpha) \vee (a \, . -e \, . \, o \, . \, \alpha) \vee (-a \, . \, o \, . \, \alpha) \leftrightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

Aplicando la propiedad distributiva de la conjunción respecto de la disyunción, tendremos:

$$\underset{\alpha}{O}sr \leftrightarrow [(-o) \vee (a \, . -e \, . \, o) \vee (-a \, . \, o)] \, . \, \alpha$$

relación lógica cuya relación aritmética asociada es la siguiente:

$$N(\underset{\alpha}{O}sr) = [N(-o), \, N(a \, . -e \, . \, o), \, N(-a \, . \, o), \, N(\alpha)]$$

(30) La condiciones aritméticas generales para la coherencia y completitud de un sistema —así como la demostración de su carácter necesario y suficiente— se dan al final de este trabajo.

DA-1983, núm. 199. MIGUEL SÁNCHEZ-MAZAS. Sistemas normativos, sistemas de Bertalanffy y re...

Ahora bien, tenemos ya los valores de 3 de los 4 números que figuraban en el miembro de la izquierda de la precedente igualdad:

$$N(-o)=170$$
$$N(a\,.\,-e\,.\,o)=502$$
$$N(\alpha)=1$$

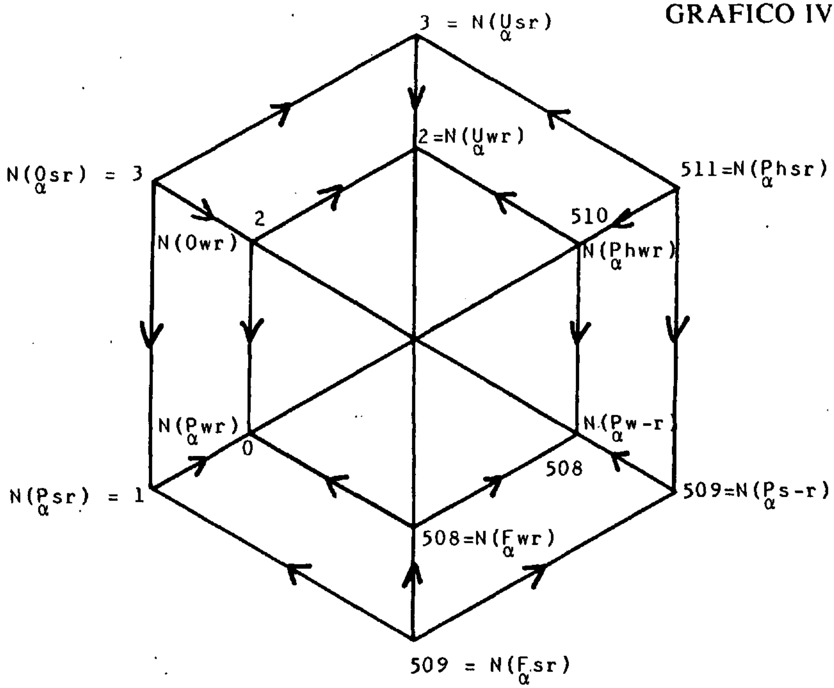
El cuarto, $N(-a\,.\,o)$, se obtiene de los ya obtenidos $N(-a)=30$ y $N(o)=340$, ya que $N(-a\,.\,o)=[N(-a), N(o)]=[30, 340]=350$.

Tendremos, en resumidas cuentas:

$$N(\underset{\alpha}{O}sr)=[(170, 502, 350), 1]=2+1=\boxed{3}$$

Recordando, por último, las relaciones de implicación y de oposición entre estatutos deónticos de una acción y la traducción aritmética de cada una de ellas, así como la asociación del número g (aquí g=511) a toda solución no definida en el sistema considerado —por no existir ningún caso elemental que la implique—, llegamos a los valores numéricos de los distintos estatutos deónticos de la acción r (restitución) que se indican en el Gráfico IV, para $\alpha=S_2$.

GRAFICO IV



Las cuatro normas N_3, N_4, N_5 y N_6 hubieran podido reducirse, para obtener el mismo resultado, a los dos siguientes:

$$N_4: \quad a \cdot e \cdot o \cdot \alpha \qquad \leftrightarrow \qquad \underset{\alpha}{F}sr$$

$$N^*: \quad [(-a) \vee (-e) \vee (-o)] \cdot \alpha \qquad \leftrightarrow \qquad \underset{\alpha}{O}sr$$

que podíamos leer: «restitución facultativa si y sólo si buena fe tanto de adquirente como de enajenante y adquisición onerosa» y «restitución obligatoria si y sólo si mala fe de adquirente o de enajenante o adquisición gratuita».

Las fórmulas que corresponden, en el modelo aritmético del sistema α considerado, a las fórmulas lógicas anteriores, que expresan las dos normas N_4 y N^* de ese sistema, son, respectivamente, las dos igualdades aritméticas siguientes:

$$[N(a), N(e), N(o), N(\alpha)] = N(\underset{\alpha}{F}sr) \qquad [1]$$

$$\big[[N(-a), N(-e), N(-o)], N(\alpha)\big] = N(\underset{\alpha}{O}sr) \qquad [2]$$

Ahora bien, es posible demostrar que, de hecho, serían suficientes para traducir aritméticamente el sistema, en lugar de las dos relaciones de igualdad expresadas por [1] y [2], dos relaciones más débiles, a saber, las correspondientes relaciones de composición:

$$[N(a), N(e), N(o), N(\alpha)] \vdots N(\underset{\alpha}{F}sr) \qquad [1^*]$$

$$\big[[N(-a), N(-e), N(-o)], N(\alpha)\big] \vdots N(\underset{\alpha}{O}sr) \qquad [2^*]$$

una vez que ha quedado establecido que la tercera solución maximal posible, a parte de $\underset{\alpha}{F}sr$ y $\underset{\alpha}{O}sr$, a saber $\underset{\alpha}{P}hsr$ es una solución inexistente o imposible en el sistema, a la que ha quedado, por lo tanto asociado el número $g = 511$; característico según el punto 10 b) de las condiciones de correspondencia lógico-aritmética en que se basa el modelo.

En efecto, si designamos por «G» una solución imposible en el sistema, que tiene asociado el número g, tendremos:

$$\top \underset{\alpha}{F}sr \leftrightarrow \underset{\alpha}{U}sr \leftrightarrow (\underset{\alpha}{O}sr) \vee (\underset{\alpha}{P}hsr) \leftrightarrow (\underset{\alpha}{O}sr) \vee \underset{\alpha}{G} \leftrightarrow \underset{\alpha}{O}sr \qquad [3]$$

$$\top \underset{\alpha}{O}sr \leftrightarrow \top [(\underset{\alpha}{O}sr) \vee \underset{\alpha}{G}] \leftrightarrow \top [(\underset{\alpha}{O}sr) \vee (\underset{\alpha}{P}hsr)] \leftrightarrow \underset{\alpha}{U}sr \leftrightarrow \underset{\alpha}{F}sr \qquad [4]$$

Teniendo en cuenta ahora los valores de los antecedentes de las relaciones aritméticas [1*] y [2*], que son, respectivamente, los siguientes:

$$[N(a), N(e), N(o), N(\alpha)] = [480, 408, 340, 1] = 509 \qquad [5]$$

$$\big[[N(-a), N(-e), N(-o)], N(\alpha)\big] = [(30, 102, 170), 1] = 3 \qquad [6]$$

y sustituyendo esos valores en [1*] y [2*] para simplificar las fórmulas que siguen, tendremos:

$$509 \vdots N(\underset{\alpha}{F}sr) \qquad [1^{**}]$$

$$3 \vdots N(\underset{\alpha}{O}sr) \qquad [2^{**}]$$

como fórmulas equivalentes a [1*] y [2*].

Ahora bien, por ser el número $g = 2^{n+1} - 1$, supremo de la red numérica $R(\alpha)$, asociada al sistema normativo α, igual a la suma de todas las potencias de 2, desde $2^0 = 1$ hasta 2^n:

$$g = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots +$$

$$+ 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

o, lo que es lo mismo, poniendo el valor de n en el sistema, es decir, $n = 8$:

$$g = 1+2+4+8+16+32+$$
$$+64+128+256=$$
$$=2^{8+1}-1=2^9-1=512-1=511,$$

tiene la propiedad, como mínimo compuesto binario común de todos los números de la red $R(\alpha)$, de que:

$$[\forall N_i, N_j \in R(\alpha)]\,[(N_i \quad N_j) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [(g - N_j) \vdots (g - N_i)] \qquad [7]$$

traducción aritmética de la ley lógica de contraposición que nos dice que para todo par de números N_i, N_j pertenecientes a la red $R(\alpha)$, uno cualquiera de ellos es un compuesto binario del otro si y sólo si el complementario del segundo respecto de g es un compuesto binario del complementario del primero.

Podremos escribir, por tanto, como consecuencia de [7]:

$$[509 \vdots N(\underset{\alpha}{F}sr)] \leftrightarrow \Big[[g - N(\underset{\alpha}{F}sr)] \vdots 2\Big] \qquad [8]$$

$$[3 \vdots N(\underset{\alpha}{O}sr)] \leftrightarrow \Big[[g - N(\underset{\alpha}{O}sr)] \vdots 508\Big] \qquad [9]$$

Ahora bien, como el primer miembro de la equivalencia [8] es la fórmula [1**], expresión simplificada de [1*], de éstas se deduce el segundo miembro de [8]:

$$[g - N(\underset{\alpha}{F}sr)] \vdots 2$$

y, al ser necesariamente $N(\underset{\alpha}{F}sr)$ impar —por asociado a una solución— y g impar, $g - N(\underset{\alpha}{F}sr)$ será par y tendremos también:

$$[g - N(\underset{\alpha}{F}sr) + 1] \vdots 13$$

y también:

$$\left[g - [N(\underset{\alpha}{F}sr), 1] + [N(\underset{\alpha}{F}sr), 1]\right] \vdots 3$$

y, al ser el primer miembro la expresión del número asociado a la negación interna $\urcorner \underset{\alpha}{F}sr$ de Fsr, tendremos:

$$N(\urcorner \underset{\alpha}{F}sr) \vdots 3$$

y teniendo en cuenta la equivalencia [3] en el sistema α, debido a la imposibilidad en el mismo de $\underset{\alpha}{P}hsy$, podremos escribir también, como consecuencia de [1*] o de [1**]:

$$[N(\underset{\alpha}{O}sr)] \vdots 3 \qquad [1***]$$

De un modo enteramente análogo, podemos deducir de [2*] o [2**] la fórmula siguiente:

$$[N(\underset{\alpha}{F}sr)] \vdots 509 \qquad [2***]$$

Ahora bien, la conjunción de dos relaciones de composición inversas equivale a la relación de igualdad, por lo que podremos escribir, combinando, respectivamente, las relaciones [1**] y [2***], de un lado, y [2**] y [1***], de otro:

$$[1**] \text{ y } [2***]: \left[509 \vdots [N(\underset{\alpha}{F}sr)] \cdot [N(\underset{\alpha}{F}sr) \vdots 509]\right] \leftrightarrow [509 = N(\underset{\alpha}{F}sr)] \qquad [10]$$

$$[2**] \text{ y } [1***]: \left[3 \vdots [N(\underset{\alpha}{O}sr)] \cdot [N(\underset{\alpha}{O}sr) \vdots 3]\right] \leftrightarrow [3 = N(\underset{\alpha}{O}sr)] \qquad [11]$$

Llegamos con ello a la conclusión de que el sistema de relaciones aritméticas [1*] y [2*] implica el sistema formado por [1] y [2] y, por tanto, es tan fuerte como él, aunque cada una de las fórmulas [1*] y [2*] es más débil que la correspondiente de [1] [2]. Ahora bien, el sistema de fórmulas lógicas correspondiente al sistema [1*] y [2*] de fórmulas aritméticas es el siguiente:

$$N_4^*: \quad a \cdot e \cdot o \cdot \alpha \rightarrow \underset{\alpha}{F}sr$$

$$N^{**}: \quad [(-a) \vee (-e) \vee (-o)] \cdot \alpha \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

Recordemos, no obstante, que a esta conclusión se ha llegado apoyándose en el preciso supuesto de que ha quedado establecida la inexistencia o imposibilidad de la tercera solución maximal posible, a saber $\underset{\alpha}{P}hsy$, en el sistema normativo α que estamos considerando. El rigor exige que hagamos explícito este supuesto escribiéndolo, por ejemplo, '$\underset{\alpha}{P}hsy \leftrightarrow G$', fórmula lógica asociada a la aritmética '$N\,(Phsy) = N\,(G) = g = 511$', con lo cual los dos sistemas realmente equivalentes son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \,.\, e \,.\, o \,.\, \alpha & \rightarrow \underset{\alpha}{F}sr \\ {[(-a) \vee (-e) \vee (-o)]} \,.\, & \underset{\alpha}{O}sr \end{array} \right\} \quad y \quad \left\{ \begin{array}{rl} a \,.\, e \,.\, o \,.\, \alpha & \rightarrow \underset{\alpha}{F}sr \\ {[(-a) \vee (e-) \vee (-o)]} \,.\, \alpha & \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr \\ \underset{\alpha}{\bar{G}} & \rightarrow \underset{\alpha}{P}hsr \end{array} \right\}$$

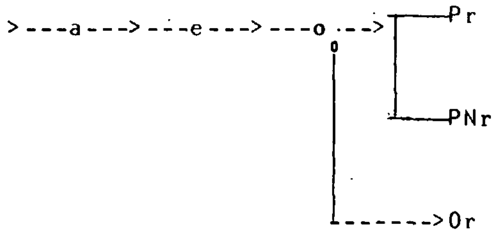
En su notable «lenguaje normalizado para clarificar la estructura del razonamiento jurídico» (31), el eminente jurista y lógico del Derecho norteamericano Layman E. Allen, profesor de la Universidad de Michigan en Ann Arbor —que dedica en este Congreso precisamente su ponencia *Two Modes of Representing Sets of Legal Norms: Normalization and an Arithmetical Model* a analizar y comparar sistemáticamente mi precedente modelo aritmético de los sistemas normativos (32), experimentado y aplicado por un equipo de investigadores del Istituto per la Documentazione Giuridica del C. N. R. de Florencia, con ese lenguaje normalizado por él construido, escribiría, sin duda, del modo siguiente, teniendo en cuenta la equivalencia de De Morgan

$$[(-a) \vee (-e) \vee (-o)] \leftrightarrow -[(a \,.\, e \,.\, o)]$$

(31) Véase el importantísimo trabajo del profesor Allen, reseñado en la bibliografía de este trabajo bajo 3.

(32) Corresponde a mis trabajos reseñados en la bibliografía bajo 6 y 7.

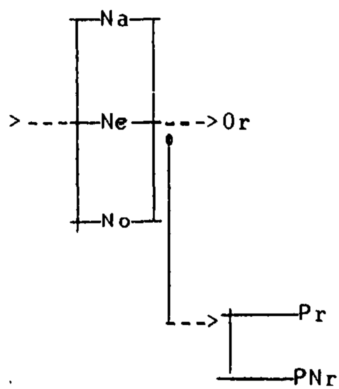
el sistema de normas que estamos considerando:



que podríamos leer del modo siguiente:

«IF a AND e AND o THEN PERMITTED r AND PERMITTED NOT r BUT OTHERWISE OBLIGATED r»

También podría escribirlo seguramente del modo siguiente, equivalente al anterior:



(teniendo en cuenta la otra equivalencia de De Morgan, a saber, $a \cdot e \cdot o \leftrightarrow -[(-a) \vee (-e) \vee (-o)]$, que podríamos leer del modo siguiente:

«IF NOT a OR NOT e OR NOT o THEN OBLIGATED r BUT OTHERWISE PERMITTED r AND PERMITTED NOT r»

Estudiemos ahora, para resolver el mismo problema tipo propuesto por Alchourrón y Bulygin, otro sistema normativo, también mencionado por dichos autores, que podemos calificar de incompleto y coherente y designar como S_4, definido por las dos normas N_3 y N_5, que expresaremos del modo siguiente:

$$N_3\colon\ -o\cdot\alpha \qquad \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

$$N_5\colon\ a\cdot-e\cdot o\cdot\alpha \qquad \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

Se trata, como puede constatarse, de un sistema parcial del S_2 anterior, en que sólo dos de las cuatro normas que inicialmente definían ese sistema se han mencionado y donde la única solución maximal existente o definida es la obligación $\underset{\alpha}{O}sr$.

El número asociado a dicha solución, a saber $N(\underset{\alpha}{O}sr)$, será calculado como en el caso anterior, como número correspondiente, en el modelo, a la disyunción de las dos cunjunciones que implican $\underset{\alpha}{O}sr$:

$$N(\underset{\alpha}{O}sr) = N[(-o\cdot\alpha)\ v\ (a\cdot-e\cdot o\cdot\alpha)] =$$

$$= N\big[[(-o)\ v\ (a\cdot-e\cdot o)]\cdot\alpha\big] =$$

$$\big[[N\,(-o),\ N\,(a\cdot-e\cdot o)],\ N\,\alpha)] = [(170,\ 502),\ 1] = [162,\ 1] = \mathit{163}$$

Los números asociados a las otras dos soluciones maximales $\underset{\alpha}{P}hsr$ y $\underset{\alpha}{F}sr$ no definidas en el sistema α deben ser por ello iguales al número g de las soluciones inexistentes en el sistema:

$$N(\underset{\alpha}{P}hsr) = (G) = g = \mathit{511}$$

$$N(\underset{\alpha}{F}sr) = N(G) = g = \mathit{511}$$

Obtenemos también inmediatamente los números asociados a las tres soluciones minimales:

$$N\,(\underset{\alpha}{P}sr) = N\,[(\underset{\alpha}{O}sr)\ v\ (\underset{\alpha}{F}sr)] = [N\,(\underset{\alpha}{O}sr),\ N(\underset{\alpha}{F}sr)] = (163,\ 511) = \mathit{163}$$

$$N\,(\underset{\alpha}{U}sr) = N[(\underset{\alpha}{O}sr)\ v\ (\underset{\alpha}{P}hsr)] = [\,N\,(\underset{\alpha}{O}sr),\ N\,(\underset{\alpha}{P}hsr)] = (163,\ 511) = \mathit{163}$$

$$N(Ps-r) = N[(Phsr)\,v\,(Fsr)] = [N(Phsr),\ N(Fsr)] = (511,\ 511) = \mathit{511}$$

En cuanto a los números asociados a los estatutos débiles, se calculan como correspondientes a la negación externa de los estatutos fuertes o soluciones que, respectivamente, se oponen los primeros según esa negación:

$$N(Pwr) = N\,(\sim Phsr) = g - N(Phsr) = g - 511 = 511 - 511 = \mathit{0}$$

$$N(Pw-r) = (\sim Osr) = g - N(Osr) = g - 163 = 511 - 163 = \mathit{348}$$

$$N(Uwr) = N(\sim Fsr) = g - N(Fsr) = g - 511 = 511 - 511 = \mathit{0}$$

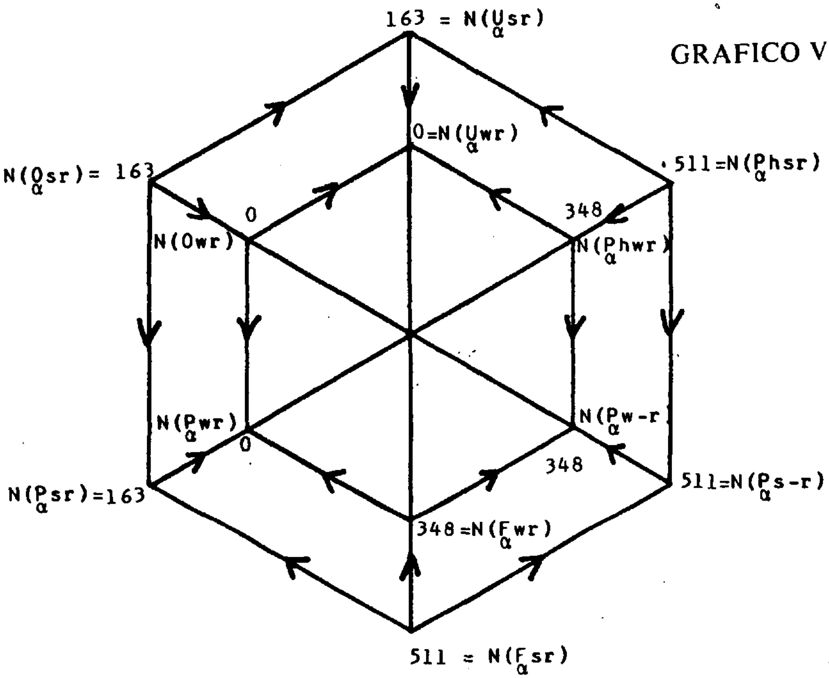
$$N(Phwr) = N(\sim Psr) = g - N(Psr) = g - 163 = 511 - 163 = \mathit{348}$$

$$N(Owr) = N(\sim Ps - r) = g - N(Ps - r) = g - 511 = 511 - 511 = \mathit{0}$$

$$N(Fwr) = N(\sim Usr) = g - N(Usr) = g - 163 = 511 - 163 = \mathit{348}$$

La representación de los 12 estatutos deónticos de la acción r en el sistema S_4 en el doble hexágono es, pues, la que indica el gráfico V:

GRAFICO V



Estudiemos ahora —siempre a través del instrumento aritmético— un último sistema normativo —esta vez incompleto y, además, incoherente— propuesto también para resolver el mismo problema tipo sugerido por los grandes maestros de la Escuela Analítica Argentina.

Este último sistema —que llamaremos S_3— está compuesto de las ters normas N_2, N_3 y N_7, que formularemos del modo siguiente:

$$N_2: \; -a\cdot\alpha \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

$$M_3: \; -o\cdot\alpha \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr$$

$$N_7: \; a\cdot e\cdot\alpha \rightarrow \underset{\alpha}{F}sr$$

(Estas fórmulas traducen los tres enunciados en lenguaje natural mencionados por Alchourrón y Bulygin del siguiente modo (33):

N_2: Compete la reivindicación contra el actual poseedor de mala fe.
N_3: Compete la reivindicación si la enajenación se hizo a título gratuito.
N_7: No compete la reivindicación contra el actual poseedor de buena fe, que hubo la cosa de un enajenante de buena fe.)

Estando ya determinados, una vez por todas, los números asociados a —a, —o y a·e·o, el cálculo de los números asociados a las soluciones $\underset{\alpha}{O}sr$ y $\underset{\alpha}{F}sr$ es inmediato:

$$N(\underset{\alpha}{O}sr) = N[(-a\cdot\alpha) \vee (-o\cdot\alpha)] = N[[(-a) \vee (-o)]\cdot\alpha] =$$

$$[[N(-a),\ N(-o)],\ N(\alpha)] = [(30,\ 170),\ 1] = [10,\ 1] = \mathit{11}$$

$$N(\underset{\alpha}{F}sr) = N(a\cdot e\cdot\alpha) = [N(a),\ N(e),\ N(\alpha)] =$$
$$= [480,\ 408,\ 1] = \mathit{505}$$

Por su parte, $N(\underset{\alpha}{P}hsr) = 511$, por ser la solución $\underset{\alpha}{P}hsr$ inexistente o imposible en el sistema.

Los estatutos fuertes minimales y todos los débiles —maximales y minimales— quedan asociados con ello a los números siguientes:

$$N(\underset{\alpha}{P}sr) = (11,\ 505) = \mathit{9} \qquad N(\underset{\alpha}{P}hwr) = 511 - 9 = \mathit{502}$$
$$N(\underset{\alpha}{U}sr) = (11,\ 511) = \mathit{11} \qquad N(\underset{\alpha}{F}wr) = 511 - 11 = \mathit{500}$$
$$N(\underset{\alpha}{P}s - r) = (511,\ 505) = \mathit{505} \qquad N(\underset{\alpha}{O}wr) = 511 - 505 = \mathit{6}$$

$$N(\underset{\alpha}{P}w - r) = (502,\ 500) = 500$$
$$N(\underset{\alpha}{U}wr) = (502,\ 6) = 6$$
$$N(\underset{\alpha}{P}wr) = (500,\ 6) = 4$$

Este último valor, calculado sobre la base de la expresión siguiente de $\underset{\alpha}{P}wr$:

$$\underset{\alpha}{P}wr \leftrightarrow (\underset{\alpha}{F}wr) \vee (\underset{\alpha}{O}wr)$$

(33) Véase 2, p. 43.

DA-1983, núm. 199. MIGUEL SÁNCHEZ-MAZAS. Sistemas normativos, sistemas de Bertalanffy y re...

muestra ya una incoherencia del sistema. En efecto, si el sistema fuera coherente, la permisión fuerte, cuyo número asociado es 9, debiera implicar la permisión débil, lo cual exigiría que 9(=8+1) fuera un compuesto binario de 4, que es el número asociado a dicha permisión débil.

Sin embargo, la verificación fundamental de la incoherencia del sistema se basa en el hallazgo de algún caso elemental que inplique más de una solución maximal. Y aunque luego examinaremos el procedimiento sistemático y general para las verificaciones por vía aritmética de la (in)coherencia y de la (in)compatibilidad de un sistema normativo, podemos constatar aquí ya que el caso $a \cdot e \cdot - o$, cuyo número característico es 506, implica las dos soluciones maximales $\underset{\alpha}{O}sr$ y $\underset{\alpha}{F}sr$, es decir, que tenemos a la vez:

$$a \cdot e \cdot - o \cdot \alpha \rightarrow \underset{\alpha}{O}sr \qquad [12]$$

$$a \cdot e \cdot - o \cdot \alpha \rightarrow \underset{\alpha}{F}sr \qquad [13]$$

En efecto, estas fórmulas [12] y [13] son equivalentes, respectivamente, en virtud de las leyes de absorción bien conocidas del cálculo proposicional, a las fórmulas [12*] y [13*]:

$$a \cdot e \cdot - o \cdot \alpha \cdot \underset{\alpha}{O}sr \leftrightarrow a \cdot e \cdot - o \cdot \alpha \qquad [12^*]$$

$$a \cdot e \cdot - o \cdot \alpha \cdot \underset{\alpha}{F}sr \leftrightarrow a \cdot e \cdot - o \cdot \alpha \qquad [13^*]$$

cuyas fórmulas aritméticas asociadas en el modelo son, respectivamente, las igualdades aritméticas verdaderas [12**] y [13**]:

$$[480, 408, 170, 1, 11] = 507 = [480, 408, 170, 1] \qquad [12^{**}]$$
$$[480, 408, 170, 1, 505] = 507 = [480, 408, 170, 1] \qquad [13^{**}]$$

Por su parte, la verificación de la incompletitud del sistema se basa en el hallazgo de algún caso que no implique ninguna solución maximal. Esto es lo que ocurre con $a \cdot - e \cdot o$, cuyo número característico es 502, ya que son *falsas* las tres fórmulas

$$a \cdot - e \cdot o \cdot \alpha \cdot \underset{\alpha}{O}sr \leftrightarrow a \cdot - e \cdot o \cdot \alpha,$$

$$a \cdot - e \cdot o \cdot \alpha \cdot \alpha : \underset{\alpha}{F}sr \leftrightarrow a \cdot - e \cdot o \cdot \alpha$$

y

$$a \cdot - e \cdot o \cdot \alpha \cdot \underset{\alpha}{P}hsr \leftrightarrow a \cdot - e \cdot o \cdot \alpha,$$

como puede comprobarse aritméticamente:

$$[502, 1, 11] = 511 \neq [502, 1], [502, 1, 503] =$$
$$= 511 \neq [502, 1]$$
$$\text{y } [502, 1, 511] = 511 \neq [502, 1]$$

Q. E. D.

Vamos a estudiar, finalmente, el procedimiento de construcción del modelo aritmético de un sistema normativo cuando podemos suponer que las propiedades del Universo de Propiedades relevantes para la determinación de las soluciones, cuyos compuestos veritativo-funcionales no tautológicos ni contradictorios definen todos los casos posibles, no son lógicamente independientes entre sí.

Sea α, por ejemplo, el artículo 45, 1.º del Código Civil de España:

«Está prohibido el matrimonio al menor de edad no emancipado por anteriores nupcias que no haya obtenido la licencia de las personas a quienes corresponde otorgarla.»

Las propiedades del Universo de Propiedades relevantes para la determinación de las soluciones correspondiente a cada caso y sus propiedades complementarias son las siguientes:

m = mayor de edad;	— m = menor de edad;
e = emancipado por anteriores nupcias;	— e = no emancipado por anteriores nupcias;
l = con licencia...;	— l = sin licencia...

En cuanto a la acción o contenido deóntico por determinar, se trata de la siguiente:

c = contraer matrimonio

la cual admite, teóricamente, en principio, tres soluciones o determinaciones deónticas fuertes, a saber: $\underset{\alpha}{\mathrm{P}}\mathrm{hsy}$, $\underset{\alpha}{\mathrm{F}}\mathrm{sy}$ y $\underset{\alpha}{\mathrm{O}}\mathrm{sy}$.

Es lícito suponer que las tres propiedades de U.P. considerado no son independientes entre sí: ser ya mayor de edad, en efecto, supone no estar emancipado por anteriores nupcias (aunque se haya contraído anteriormente matrimonio) y ser mayor de edad o estar emancipado supone no haber obtenido licencia para casarse, por no necesitarse, no haberse pedido o no tener la eventual aprobación de padres y tutores el papel jurídico estricto de licencia. La independencia recíproca de las tres propiedades consideradas puede suponerse, pues, legítimamente.

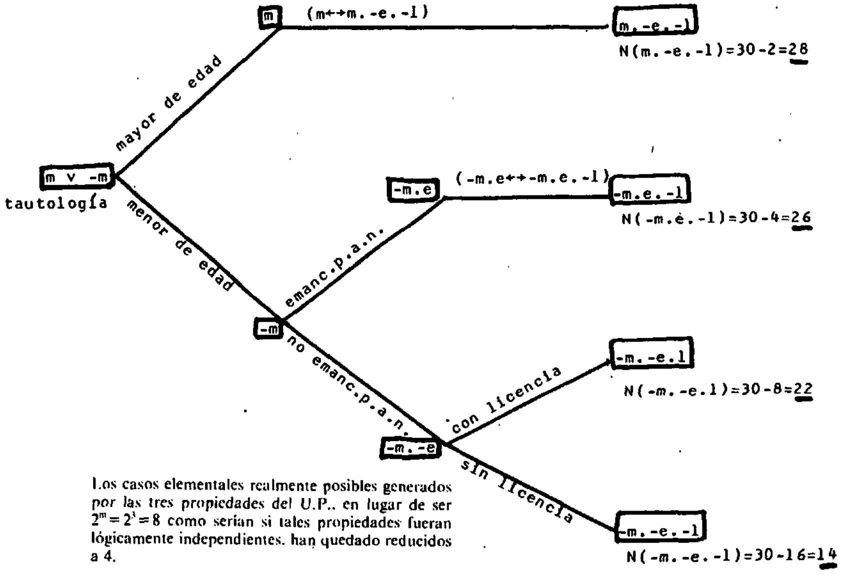
DA-1983, núm. 199. MIGUEL SÁNCHEZ-MAZAS. Sistemas normativos, sistemas de Bertalanffy y re...

limitada, reducida o costreñida por relaciones de implicación y de incompatibilidad que podemos expresar mediante las fórmulas siguientes: $m \rightarrow -e$, $m \rightarrow -l$, luego $m \leftrightarrow m \cdot -e \cdot -l$; $e \rightarrow -l$, así $e \leftrightarrow e \cdot -l$.

GRAFICO VI

GENERACION DE LOS CASOS ELEMENTALES REALMENTE POSIBLES EN EL SISTEMA α (ART. 45, 1.° DEL CODIGO CIVIL DE ESPAÑA) A PARTIR DE LAS TRES PROPIEDADES RELEVANTES M, E, L DEL U.P.

$$f = 2^{n+1} - 2 = 2^{4+1} - 2 = 32 - 2 = 30$$



Los casos elementales realmente posibles generados por las tres propiedades del U.P., en lugar de ser $2^m = 2^3 = 8$ como serían si tales propiedades fueran lógicamente independientes, han quedado reducidos a 4.

El sistema normativo α (art. 45, 1.° del Código Civil de España) puede expresarse por las fórmulas lógicas siguientes:

$$-m\cdot -e\cdot -1\cdot \alpha \rightarrow \underset{\alpha}{P}hsc$$
$$\underset{\alpha}{G} \rightarrow \underset{\alpha}{F}sc$$
$$\underset{\alpha}{G} \rightarrow \underset{\alpha}{O}sc$$

El sistema de fórmulas precedente es, como sabemos, equivalente, al siguiente:

$$-m\cdot -e\cdot -1\cdot \alpha \leftrightarrow \underset{\alpha}{P}hsc$$
$$\underset{\alpha}{G} \leftrightarrow \underset{\alpha}{F}sc$$
$$\underset{\alpha}{G} \leftrightarrow \underset{\alpha}{O}sc$$

cuya traducción aritmética es el sistema siguiente:

$$N(\underset{\alpha}{P}hsc)=[N(-m\cdot -e\cdot -1),\ N(\alpha)]=[14,\ 1]=15$$
$$N(\underset{\alpha}{F}sc)=N(\underset{\alpha}{G})=g=2^{4+1}-1=32-1=31$$
$$N(\underset{\alpha}{O}sc)=N(\underset{\alpha}{G})=g=2^{4+1}-1=32-1=31$$

del que es posible deducir todos los restantes valores de los estatutos deónticos posibles de la acción c:

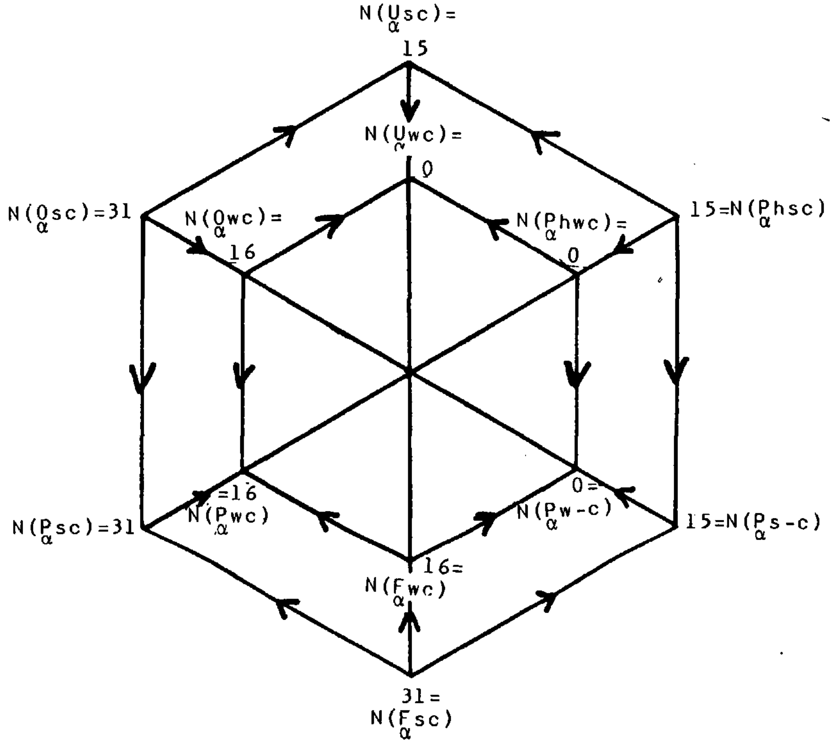
$$N(\underset{\alpha}{P}sc)=(31,\ 31)=31$$
$$N(\underset{\alpha}{U}sc)=(15,\ 31)=15$$
$$N(\underset{\alpha}{P}s-c)=15,\ 31)=15$$
$$N(\underset{\alpha}{P}wc)=31-15=16$$
$$N(\underset{\alpha}{U}wc)=31-31=0$$
$$N(\underset{\alpha}{P}w-c)=31-31=0$$
$$N(\underset{\alpha}{P}hwc)=31-31=0$$
$$N(\underset{\alpha}{F}wc)=31-15=16$$
$$N(\underset{\alpha}{O}wc)=31-15=16$$

El sistema es incompleto, porque sólo el caso $-m\cdot -e\cdot -1$ tiene una solución maximal, mientras que los otros tres sólo tienen estatutos débiles, consecutivos al hecho de no estar fuertemente prohibidos.

Los números asociados a todos ellos están en el gráfico VII.

GRAFICO VII

REPRESENTACION GEOMETRICA Y ARITMETICA DE LAS RELACIONES LOGICAS ENTRE LOS 12 ESTATUTOS DEONTICOS POSIBLES DE LA ACCION C



En el análisis automático, por vía aritmética, de los sistemas normativos, desempeñan un papel fundamental cuatro números de la red numérica R(α) asociada al sistema normativo a que se considere. Estos cuatro números privilegiados son, como estamos viendo, los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{el número } N_{\alpha}(\mathrm{Osy}); \\ 2.\ \text{el número } N_{\alpha}(\mathrm{Phsy}); \\ 3.\ \text{el número } N_{\alpha}(\mathrm{Fsy}); \end{array}\right\} \text{los tres números asociados a las soluciones maximales}$$

4. el número $N(\underset{\alpha}{G}) = g = 2^{n+1} - 1$ asociado a las soluciones imposibles en el sistema y a las conjunciones de soluciones lógicamente incompatibles.

Los cuatro números mencionados quedan, como sabemos enteramente definidos una vez fijado el número n de casos elementales y el entero par $N(x_{ei} = g - 1 - 2^{i}$ asociado a cada uno de ellos y traducida aritméticamente cada una de las fórmulas lógicas que expresan las normas del sistema.

Cuando esos cuatro números han sido calculados y son conocidos, la relación entre los mismos permite verificar inmediatamente la (in)completitud y/o la in(coherencia) del sistema, mientras que la relación con cada uno de ellos del número asocidado a cualquier caso (elemental o complejo) del sistema permite decidir acerca del estatuto deóntico, fuerte o débil, de una acción y en el caso en cuestión.

De hecho, todo ocurre en el modelo aritmético del sistema como si el mecanismo de comparación y de tratamiento o manipulación aritmética de cualesquiera números de la red tomando como base común de referencia esos cuatro números privilegiados fuera el único contenido de la «caja negra» *(black-box)* que gobierna todo el sistema normativo como un sistema de Bertalanffy (34) cuyas entradas fueran problemas o casos y cuyas salidas fueran respuestas o soluciones (35), unas y otras expresadas, introducidas en la caja o extraídas de la misma en forma numérica.

Como sabemos, en efecto, las relaciones lógicas y deónticas entre todos los componentes de un sistema normativo α quedan enteramente definidas por las relaciones aritméticas entre sus números asociados, pertenecientes a la red numérica $R(\alpha)$, que tiene la estructura algebraica de un retículo distributivo y complementado y de un álgebra de Boole.

Hemos de añadir ahora que, a su vez, las relaciones aritméticas entre dos números $N(z_i)$ y $N(z_j)$ asociados a dos componentes —casos y/o estatutos deónticos de una acción— z_i y z_j del sistema, están

(34) Véase 4, y también el capítulo III de 5, donde se ofrece una versión sencilla y sugestiva del modelo conjuntista de la teoría general de sistemas propuesto por Mesarovic y Eckman en 1960, al cual nos atenemos para interpretar nuestra traducción aritmética de los sistemas normativos en el marco de la concepción de Bertalanffy.

(35) «L'approche *entrée-sortie*, que l'on désigne également comme stimuli-réponse, causale, terminale...», 5, p. 36.

enteramente definidas por las relaciones de cada uno de esos dos números con la mencionada cuaterna $N(\underset{\alpha}{Osy})$, $N(\underset{\alpha}{Phsy})$, $N(\underset{\alpha}{Fsy})$ y $N(\underset{\alpha}{G})$ de números fundamentales de la red $R(\alpha)$, que actúan como intermediarios entre todos los demás y como reguladores de toda la red.

Sean $\underset{\alpha}{M_i}$, $\underset{\alpha}{M_j}$ y $\underset{\alpha}{M_k}$ las tres soluciones maximales de la red, $\underset{\alpha}{Osy}$, $\underset{\alpha}{\overline{Phsy}}$ y $\underset{\alpha}{\overline{F}sy}$, tomadas en cualquier orden, y $N(\underset{\alpha}{M_i})$, $N(\underset{\alpha}{M_j})$ y $N(M_k)$ sus números característicos respectivos.

Supongamos que estos tres números han sido calculados en un sistema α, al igual que el número $N(\underset{\alpha}{G}) = g = 2^{n+1} - 1$ y veamos cuáles son, en función de esos cuatro números, las condiciones aritméticas de la coherencia y de la completitud del sistema α.

Condición de coherencia: Diremos que un sistema α es coherente si y sólo si el ínfimo —máximo compuesto binario común— de los números asociados a las negaciones externas $\sim \underset{\alpha}{M_j}$ y $\sim \underset{\alpha}{M_k}$ de dos soluciones maximales cualesquiera $\underset{\alpha}{M_j}$ y $\underset{\alpha}{M_k}$ es siempre nulo:

$$(\alpha \in Coh) \leftrightarrow [[N(\sim \underset{\alpha}{M_j}), N(\sim \underset{\alpha}{M_k})] = 0] \qquad [14]$$

Esta condición equivale, en efecto, a la de que no exista ningún caso elemental x_{ei} —y, por lo tanto, ningún caso, elemental o complejo— que implique dos soluciones maximales distintas.

Supongamos, en efecto, que un caso elemental x_{ei} implica en el sistema α dos soluciones maximales diferentes $\underset{\alpha}{M_j}$ y $\underset{\alpha}{M_k}$:

$$x_{ei} \cdot \alpha \rightarrow \underset{\alpha}{M_j} \qquad [15]$$

$$X_{ei} \,.\, \alpha \rightarrow \underset{\alpha}{M_k} \qquad [16]$$

Las relaciones aritméticas equivalentes a las relaciones lógicas [15] y [16] son, respectivamente, [15*] y [16*]:

$$[N(x_{ei}) + 1] \vdots N(\underset{\alpha}{M_j}) \qquad [15^*]$$

$$[N(x_{ei}) + 1] \vdots N(\underset{\alpha}{M_k}) \qquad [16^*]$$

que, sabiendo el tipo de número característico que corresponde a un caso elemental x_{ei}, podemos escribir del modo siguiente:

$$[(f - 2^i) + 1] \vdots N(\underset{\alpha}{M_j}) \qquad [15^{**}]$$

$$[(f - 2^i) + 1] \vdots (\underset{\alpha}{M_k}) \qquad [16^{**}]$$

y, como $g=2^{n+1}-1=f+1$, podremos escribir también:

$$(g-2^i) \vdots N(\underset{\alpha}{M_j}) \qquad [15^{***}]$$

$$(g-2^i) : \underset{\alpha}{N(M_k)} \qquad [16^{***}]$$

Ahora bien —como conocemos la propiedad del número g, mínimo compuesto binario común todos los números de la red $R(\alpha)$, de que, para todo par de números N_s, N_t de esa red, si N_s es un compuesto binario de N_t, entonces $g-N_t$ es un compuesto binario de $g-N_s$ y recíprocamente (propiedad que ya hemos utilizado)—, escribiremos, como consecuencias respectivas de [15***] y [16***], las relaciones equivalentes que siguen:

$$[g-N(\underset{\alpha}{M_j})] \vdots 2^i \qquad [15^{****}]$$

$$[g-N(\underset{\alpha}{M_k})] \vdots 2^i \qquad [16^{****}]$$

Pero sabemos que los antecedentes de esas dos relaciones son, respectivamente, los números característicos de $\sim \underset{\alpha}{M_j}$ y $\sim \underset{\alpha}{M_k}$. Escribiremos, por lo tanto, las fórmulas respectivamente equivalentes a las anteriores:

$$N(\sim \underset{\alpha}{M_j}) \vdots 2^i \qquad [15^{*****}]$$

$$N(\sim \underset{\alpha}{M_k}) \vdots 2^i \qquad [16^{*****}]$$

Ahora bien, si, como indican las fórmulas precedentes, los dos números que son antecedentes de las relaciones son ambos compuestos de una potencia de 2 mayor o igual que 2 (pues $i>0$), el ínfimo de esos dos números debe ser también un compuesto de esa potencia de 2 y, por lo tanto, debe ser mayor que 0:

$$[N(\sim M_j), N(\sim M_k)]>0 \qquad [17]$$

La fórmula [17] es una consecuencia de nuestra hipótesis de que el sistema α fuera incoherente por haber al menos un caso x_{ei} que implicase dos soluciones maximales distintas $\underset{\alpha}{M_j}$ y $\underset{\alpha}{M_k}$. La condición [14], opuesta a [17] es, pues, condición suficiente para que eso no ocurra y el sistema sea coherente.

La condición aritmética para la coherencia de un sistema mormativo α, establecida por [14], es no sólo suficiente, como hemos demostrado, sino también necesaria para la coherencia, ya que, si fuera falsa, los números asociados a $\sim \underset{\alpha}{M_j}$ y $\sim \underset{\alpha}{M_k}$, negaciones externas de dos soluciones maximales, tendrían al menos un componente binario común potencia de 2, que no podría ser la unidad por ser los dos números pares, sino de la forma 2^i con $i>0$. Siguiendo el razonamiento inverso al que hemos hecho para demostrar que [14] es condición suficiente para la coherencia del sistema, deduciríamos entonces que la existencia de ese componente común 2^i implica la existencia de un caso elemental de número característico $f-2^i$ que implica a la vez $\underset{\alpha}{M_j}$ y $\underset{\alpha}{M_k}$. Luego si [14] no se cumple, el sistema es incoherente. Por lo tanto, [14] es también condición necesaria para la coherencia del sistema α.

Condición de completitud. Diremos que un sistema α es completo si y sólo si el ínfimo —máximo compuesto binario común— de los números asociados a las tres soluciones maximales es igual a la unidad:

$$(\alpha \in Cm) \leftrightarrow [N(\underset{\alpha}{Osr}),\ N(\underset{\alpha}{Phsr}),\ N(\underset{\alpha}{Fsr})] = 1 \qquad [18]$$

La condición es necesaria. En efecto, si fuera falsa, los números asociados a las tres soluciones maximales tendrían al menos un componente binario común mayor que 1 igual a una potencia 2^i $(i>0)$ de 2, con lo cual el caso elemental cuyo número asociado fuera $f-2^i$ no podría implicar ninguna de las tres soluciones, ya que para ello sería necesario que $f-2^i+1$ fuera un compuesto binario de alguno de los números asociados a las soluciones maximales.

La condición es suficiente. En efecto, si el sistema α es incompleto, debe haber al menos un caso elemental, de número asociado $f-2^i$ que no tiene solución, es decir, tal que $f-2^i+1$ no está compuesto de ninguno de los tres números asociados a soluciones maximales, pero esto exige que esos tres números estén compuestos de 2^i (con $i>0$), ya que $f-2^i+1$ está compuesto de todos los números de la red $R(\alpha)$, que carecen del componente 2^i. En ese caso, los mencionados números característicos de las soluciones maximales tienen un componente común mayor que 1, contra la condición establecida por [18]. Esta condición es, pues, no sólo necesaria, sino tambieén suficiente para la completitud del sistema normativo α.

La «caja negra» aritmética que contiene el mecanismo de verificación fundado en los 4 números privilegiados a que nos estamos refiriendo sirve también, como hemos señalado, para manipular aritméticamente cualquier número asociado a un caso (elemental o complejo) que se le presente a la entrada de tal modo que, después de diversas verificaciones, la respuesta sobre el estatuto deóntico de dicho caso aparezca a la salida.

Las verificaciones mencionadas son las siguientes:

1. ¿[$N(x_i)+1$, $N(\underset{\alpha}{M_j})$] es igual a $N(x_i)+1$?
   En caso afirmativo, el caso x_i implica la solución maximal $\underset{\alpha}{M_j}$. Se repite la verificación para las tres soluciones maximales. Si las tres verificaciones son negativas, ese caso no tiene solución en el sistema. Si más de una es positiva, hay incoherencia en ese caso.
2. ¿[$N(x_i)+1$, $N(\underset{\alpha}{M_j})$] es igual a g?
   En caso afirmativo, el caso x_i excluye la solución maximal $\underset{\alpha}{M_j}$ e

implica es estatuto débil $\sim\underset{\alpha}{M_j}$.

3. ¿Todas las respuestas a las verificaciones anteriores han sido negativas? Compruébese si el caso es elemental (si su número es de la forma $f-2^i$) y si lo es el sistema no admite soluciones para ningún caso, ya que todas las soluciones tienen como número asociado g.

El modelo aritmético admite otros desarrollos. Nos hemos limitado, por ahora, a ofrecer una perspectiva general de unos procedimientos de análisis y de razonamiento matemático en la esfera del Derecho, con la convicción de que pueden sugerir unas vías de clarificación y de racionalización de esa esfera, sin deshumanizarla.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALCHOURRÓN, C. E., y BULYGIN, E.: *Normative Systems*. Wien, Springer, 1971. XVIII-208 pp.

[2] ALCHOURRÓN, C. E., y BULYGIN, E.: *Introducción a la metodología de las ciencias jurídicas y sociales*. Buenos Aires, Astrea, 1974, 277 pp.

[3] ALLEN, L. E.: «Towards a Normalized Language to Clarify the Structure of Legal Discourse». *Deontic Logic, Computational Linguistics and Legal Information Systems*. Editor: A. A. Martino. Amsterdan, North-Holland, 1982, pp.349-407.

[4] BERTALANFFY, L. V.: *General System Theory*. New York, Braziller, 1968.

[5] EUGENE, J.: *Aspects de la théorie générale des systemes.* Publié avec le concours du CNRS. París, Maloinme, 1981, 248 pp.

[6] SÁNCHEZ-MAZAS, M.: «Modelli aritmetici per l'informatica giuridica». *Informatica e diritto*, 4 (1978), pp. 163-215.

[7] SÁNCHEZ-MAZAS, M.: «Algebraic and Arithmetical Translations of Normative Systems and Applications in Legal Informatics». *Deontic Logic, Computational Linguistics and Legal Information Systems.* Editor: A. A. Martino, Amsterdam, North-Holland, 1982, pp. 169-201.

RÉSUMÉ

Dans ce nouveau modèle arithmétique des systèmes normatifs, chaque ensemble de normes qui détermine le statut déontique d'une action est représenté par un réseau de nombres naturels permettant le calcul de ses conséquences. Les nombres associés aux cas et aux statuts forts (solutions) ou faibles permettent de traduire toute relation vraie dans le système par une relation arithmétique vraie. Ainsi le modèle proposé dans des travaux précédents est étendu a un cadre logique plus large, avec la traduction arithmétique de la distinction entre modalités fortes et faibles ainsi que des conditions (définies par Alchourrón et Bulygin) pour la complétude et la cohérence d'un systeme normatif, qui se présente ici comme un système de Bertalanffy dont les input et output sont les nombres associés aux cas et a leurs solutions, respectivement.