

ANUALIDADES A INTERES SIMPLE

ERRORES DE LA PRACTICA EN USO

Las anualidades son un caso particular de las rentas, por las cuales se amortiza una deuda cualquiera. Entre particulares, y cuando la cuantía es relativamente pequeña, se suelen estipular a corto plazo anualidad constante e interés simple.

La obtención de fórmulas matemáticas que resuelvan el problema suele hacerse con ligereza en los libros de cálculo mercantil que tratan de este asunto, cometándose errores de alguna consideración, base de litigios entre las partes contratantes.

Queremos poner de manifiesto estos errores, para lo cual vamos a deducir fórmulas siguiendo dos procedimientos: primero, valores actuales; segundo, valores finales.

Primer procedimiento.—El valor actual de la deuda es igual a la suma de los valores actuales de las anualidades que la amortizan. O bien: la deuda queda cancelada pagando a fin de cada año la parte de capital que corresponde y sus intereses simples en los años transcurridos.

Llamemos c al capital prestado o importe de la deuda; A la anualidad que la amortiza; r el tanto de interés anual y n el número de años. Tendremos:

$$c = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{1+2r} + \dots + \frac{A}{1+nr}$$

y sacando factor común a A :

$$c = A \left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + \dots + \frac{1}{1+nr} \right]$$

la expresión entre corchetes, cuando n es limitado, carece de fórmula general sumatoria y, por tanto, sólo se puede hallar su valor en cada caso particular (*).

Segundo procedimiento.—El valor final de la deuda es igual a la suma de los valores finales de las anualidades que la amortizan. O bien: si el deudor devenga interés por la cantidad que recibe el acreedor lo devenga también por las cantidades que se le devuelven.

Haciendo uso de los mismos elementos de cálculo tendremos:

$$c(1+nr) = A(1+(n-1)r) + A(1+(n-2)r) + \dots + A$$

(*) Cuando n es ilimitado la expresión constituye una serie divergente (serie armónica).

y sacando factor común a A :

$$c(1 + nr) = A \left[(1 + (n-1)r) + (1 + (n-2)r) + \dots + 1 \right]$$

Haciendo operaciones indicadas, sumando ordenadamente, sacando factor común a r y sumando la progresión aritmética resultante, hallaremos la siguiente expresión como valor de la anualidad:

$$A = \frac{2c(1 + nr)}{n(2 + r(n-1))}$$

Esta fórmula es la que figura en todos los libros de cálculo mercantil que tratan de esta cuestión.

Vamos a comparar los dos procedimientos, para lo cual pondremos las fórmulas de la siguiente manera, con subíndices en la anualidad, según sea el primero o segundo procedimiento:

$$\frac{c}{A_1} = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + \dots + \frac{1}{1+nr} \quad [1]$$

$$\frac{c}{A_2} = \frac{1+(n-1)r}{1+nr} + \frac{1+(n-2)r}{1+nr} + \dots + \frac{1}{1+nr} \quad [2]$$

Teniendo los segundos miembros n términos cada uno es fácil demostrar que un término cualquiera del primer miembro es menor que su correlativo del segundo miembro, excepto los últimos, que son idénticos. Fijándonos en los que ocupan el lugar h tendremos:

$$\frac{1}{1+hr} < \frac{1+(n-h)r}{1+nr}; \quad h < n$$

Reduciendo a un común denominador, efectuando operaciones indicadas y suprimiendo términos opuestos se tendrá:

$$\frac{1}{1+hr} < \frac{1}{1+hr} + \frac{r^2 h(n-h)}{(1+hr)(1+nr)} \quad [3]$$

Y como la anualidad aparece como divisor en las fórmulas expresadas, resulta:

$$A_1 > A_2$$

Un ejemplo sencillo aclarará esta cuestión: Sea un préstamo de 90.000 pesetas, al 5 por 100 anual, durante cuatro años. ¿Qué anualidad lo amortizará?

Primer procedimiento:

$$90.000 = A_1 \left[\frac{1}{1'05} + \frac{1}{1'10} + \frac{1}{1'15} + \frac{1}{1'20} \right]; A_1 = 25.249'90 \text{ pesetas.}$$

Comprobación:

Años	Capital amortizado	Intereses pagados	Total anualidad	Observaciones
1	24.047,60	1.202,30	25.249,90	al 5 % en 1 año
2	22.954,45	2.295,45	25.249,90	" " " 2 años
3	21.956,40	3.293,50	25.249,90	" " " 3 años
4	21.041,55	4.208,35	25.249,90	" " " 4 años
	90.000,00	10.999,60	100.999,60	

Segundo procedimiento:

$$A_2 = \frac{2 \times 90.000 \times 1'20}{4 \times 2'15}; A_2 = 25.116'0 \text{ pesetas.}$$

Comprobación:

Valor final del préstamo	108.000,00
1.ª Anualidad a interés en 3 años	28.883,70
2.ª Anualidad a interés en 2 años	27.627,90
3.ª Anualidad a interés en 1 año	26.372,10
4.ª Anualidad sin interés	25.116,30
	108.000,00
Parificado	"

Se aprecia una diferencia de consideración entre ambos procedimientos, pues, a pesar de la poca cuantía de la deuda y los pocos años de amortización, la diferencia total es superior a 500 pesetas.

¿Cuál es el procedimiento verdadero? Para el acreedor o prestamista sería el primero. Para el deudor o prestatario sería el segundo, y como consecuencia de esta disparidad de criterios surgiría el pleito. El juez llamaría a un perito para informar sobre el asunto y a la vista del informe resolvería.

¿Por qué procedimiento se pronunciaría el perito? Acaso por el segundo, basándose en que la fórmula del mismo es la preconizada por todos los tratadistas de cálculo mercantil.

Sin embargo, un detenido análisis de la cuestión nos pondría de manifiesto el error de tal fórmula y la bondad del primer procedimiento. Recordemos la característica de las anualidades a interés simple: sólo producen interés los capitales prestados. Representemos por K el segundo miembro de la fórmula (1) y sustituyamos

cada sumando de la fórmula (2) por su valor en función de las diferencias que indica la desigualdad (3); se tendrá:

$$c = A_1 \cdot K$$

$$c = A_2 \cdot K + \sum_{h=1}^n \frac{A_2 r \cdot h}{1 + h r} \cdot \frac{r(n-h)}{1 + n r}$$

Vemos que mientras en el primer procedimiento el valor actual de la deuda es correctamente igual a la suma de los valores actuales de las anualidades, en el segundo procedimiento el valor actual de la deuda es igual a la suma de los valores actuales de las anualidades, más la suma de los valores actuales del interés de tales anualidades por el tiempo que falta para terminar el plazo convenido, lo cual es absurdo, ya que el interés en estas anualidades no es rentable.

Teniendo esto en cuenta, la anualidad A del primer procedimiento satisface la condición del segundo procedimiento, estableciéndola correctamente. Si el deudor devenga interés por la cantidad que recibe el acreedor los devengará también por las cantidades que se le devuelven en *concepto de capital*.

En efecto, este principio se comprobará en el ejemplo propuesto de la siguiente forma:

Intereses totales del préstamo ...	18.000,00
Intereses de 24.047,60 al 5 % 3 años	3.607,14
Intereses de 22.954,45 al 5 % 2 años	2.295,44
Intereses de 21.956,40 al 5 % 1 año	1.097,82
Intereses de 21.041,55 al 5 % 0 años	"
	7.000,40
Total intereses pagados	10.999,60

En resumen: la única fórmula verdadera de las anualidades constantes y a interés simple es la siguiente:

$$A = \frac{c}{\sum_{h=1}^n \frac{1}{1 + h r}}$$

Por tanto, las fórmulas insertas en los textos de cálculos mercantiles deben rechazarse por erróneas.

JULIO BLANCO LÓPEZ,
Intendente Actuarial
Interventor del Ayuntamiento de Gijón